§ 8 Sonstige Zahlkörper 4. Grades

Wir betrachten zuerst total komplexe Körper K 4. Grades; diese können wir klassifizieren nach der Galoisgruppe ihres normalen Abschlußes N:

1. $Gal(N/\mathbf{Q}) = Gal(K/\mathbf{Q}) = Z_4$ (zyklische Gruppe der Ordnung 4);
2. $Gal(N/\mathbf{Q}) = Gal(K/\mathbf{Q}) = V_4$ (Kleinsche Vierergruppe);
3. $Gal(N/\mathbf{Q}) = D_4$ (Diedergruppe der Ordnung 8);
4. $Gal(N/\mathbf{Q}) = A_4$ (alternierende Gruppe der Ordnung 12);
5. $Gal(N/\mathbf{Q}) = S_4$ (symmetrische Gruppe der Ordnung 24).

Hat K einen quadratischen Teilkörper, so kommen nur die ersten drei Möglichkeiten in Betracht; im 1. und 3. Fall hat K genau einen, im 2. Fall aber drei solcher Teilkörper.

Im 1. Fall gibt es nach van der Linden genau zwei normeuklidische Körper, nämlich den Körper $\mathbf{Q}(\zeta_5)$ der 5. Einheitswurzeln und den Teilkörper 4. Grades von $\mathbf{Q}(\zeta_{13})$.

Im 2. Fall haben wir alle normeuklidischen Körper in § 6 bestimmt. Sei also $Gal(N/\mathbf{Q}) = D_4$ die Diedergruppe. Dann hat K genau einen quadratischen Teilkörper $k = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$, und wir unterscheiden:

3.1.: $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ ist imaginärquadratisch. Damit K euklidisch sein kann, muß K Klassenzahl 1 haben; dies impliziert, daß der quadratische Teilkörper $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ Klassenzahl 1 oder 2 hat (dies ist eigentlich ein elementares Ergebnis - sh. z.B. Narkiewicz 1974 -, wird jedoch gewöhnlich mit Hilberts Satz 94 oder der Klassenkörpertheorie begründet). Hätte k Klassenzahl 2, so wäre K der Hilbertklassenkörper von k, also $K/\mathbf{Q}$ galoisch; dies ist aber nicht der Fall.
Also hat $k = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ Klassenzahl 1, und wir dürfen uns auf die Möglichkeiten $m = -1, -2, -3, -7, -11, -43, -67, -163$ beschränken. Ich erwarte nicht, daß sich bei der Untersuchung dieser k andere Probleme auftun als in § 7 (wo $m = -1$ war); vielmehr wird man genau wie im Falle der Dirichlet'schen Körper vorgehen können. Die beiden schwierigsten Fälle sind naturgemäß $m=-1$ und $m=-3$ wegen der Existenz nichttrivialer Einheiten; die meisten der hier betrachteten normeuklidischen Körper werden wohl auch einen dieser beiden Körper enthalten.

3.2. $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ ist reellquadratisch. Genau wie in 3.1. findet man, daß auch hier $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ Klassenzahl 1 haben muß. Will man hier das Kriterium (1.4) anwenden, so stellt man recht schnell fest, daß sich die Anwesenheit von unendlich vielen Einheiten in $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ recht störend auswirkt. Dieser Nachteil läßt sich aber durch folgende Überlegungen wettmachen: ist nämlich $u > 1$ die FE von k, so ist entweder u ebenfalls FE von K, oder es ist $K = k(\sqrt{-u})$, und $\sqrt{-u}$ ist FE von K (denn +1 und -1 sind die beiden

(8.1) Ist K ein totalkomplexer Körper 4. Grades mit $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset K$, so sind höchstens die folgenden K normeuklidisch: $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-3})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-5-2\sqrt{2}})$.

Entsprechende Rechnungen lassen sich auch für andere reellquadratische Körper durchführen. Es sei noch bemerkt, daß obige Überlegungen durch die von Cohn (1958) berechneten Klassenzahlen imaginärquadratischer Erweiterungen von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ motiviert wurden. Auch das Buch von Polya sei an dieser Stelle einmal ausdrücklich erwähnt.

Im Falle $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q}) = A_4$ ist bis heute kein einziges Beispiel eines normeuklidischen Körpers 4. Grades bekannt; dies liegt wohl daran, daß es keine solchen Körper mit $\mathrm{disc}\, K < 3136 = 2^6 7^2$ gibt.

Die allermeisten totalkomplexen Körper 4. Grades schließlich haben die Gruppe S_4 als Galoisgruppe ihres normalen Abschlusses. Hier wird man wohl ohne eine Tafel aller solcher Körper (nebst Einheiten- und Idealklassengruppe) wenig sagen können.

Über Körper 4. Grades mit $r=2$, $s=1$ oder $r=4$, $s=0$ läßt sich noch weniger sagen. Vereinzelt habe ich mit einem Computer den EA nachgewiesen; es werden jedoch eine Menge weiterer Rechnungen nötig sein, bevor man geeignete Ansatzpunkte findet.

Anmerkungen zu § 8

1937: Dribin bestimmt die Hilbertsche Untergruppenreihen für Zahlkörper mit der Galoisgruppe S_4.

1956: Godwin gibt eine Tafel totalreeller Körper 4. Grades mit kleiner Diskriminante.

1957: Godwin veröffentlicht entsprechende Tafeln für Zahlkörper 4. Grades mit $r=2$ und $r=0$.

1958: H. Cohn berechnet die Klassenzahl von imaginärquadratischen Erweiterungen von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ (mit einer äußerst ungewöhnlichen Methode: bereits Gauß hat entdeckt, daß die Anzahl der Darstellungen eines primen $p \equiv 3 \bmod 8$ als Summe dreier Quadrate eng mit der Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ zusammenhängt; eine entsprechende Formel mit $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ als Grundkörper hat sich Cohn zunutze gemacht).

198 : H. Cohn und J. Deutsch zeigen per Computer, daß $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{2}})$ normeuklidisch sind.

1980: Edgar und Peterson beschreiben zyklische Körper 4. Grades.

1985: Godwin erweitert seine Tafel aus dem Jahre 1957 für Zahlkörper 4. Grades mit $r=2$, $s=1$.

1989: Buchmann und Pohst geben alle totalreellen Zahlkörper 4. Grades mit $\mathrm{disc}\, K < 10^6$ nebst Einheiten und Klassenzahl.