§ 4 Kubische Zahlkörper

Während ein quadratischer Zahlkörper durch seine Diskriminante eindeutig bestimmt ist, ist dies bei kubischen Zahlkörpern nicht mehr der Fall: so haben z.B. die beiden Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{6})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{12})$ dieselbe Diskriminante d=972, sind aber nicht isomorph. Dennoch kann man allein an der Diskriminante einige Eigenschaften des jeweiligen Körpers ablesen. Da für das Vorzeichen der Diskriminante eines Körpers mit r reellen und 2s nichtreellen Einbettungen von K in $\mathbb{C}$ die Beziehung $\operatorname{sign}(\operatorname{disc} K) = (-1)^s$ gilt und in kubischen Körpern nur die beiden Möglichkeiten r=3, s=0 und r=1, s=1 auftreten, ist disc K genau dann positiv, wenn K total reell ist und Einheitenrang 2 hat. Dagegen ist disc K negativ, wenn r=s=1 ist und K Einheitenrang 1 hat.

Ist K ein Zahlkörper mit GHB $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, und bezeichnen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die Einbettungen von K in $\mathbb{C}$, so gilt bekanntlich $\operatorname{disc} K = \det(\sigma_i(\alpha_j))^2$. Also ist disc K das Quadrat einer Zahl, die im Galoisabschluß L von $K/\mathbb{Q}$ liegt. Dies zeigt: ist $K/\mathbb{Q}$ galoisch, so muß $\sqrt{\operatorname{disc} K} \in R$ sein, wo R wie üblich den Ring ganzer Zahlen in K bezeichnet.

Beispiel: Ist $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ der Körper der p-ten Einheitswurzeln für ein primes $p \in \mathbb{N}$, so ist $\operatorname{disc} K = (-1)^{(p-1)/2} p^{p-2}$; setzt man nun $p^* = (-1)^{(p-1)/2} p$, so hat man, weil $K/\mathbb{Q}$ galoisch ist, $\mathbb{Q}(\sqrt{p^*}) = \mathbb{Q}(\sqrt{\operatorname{disc} K}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_p)$.

Ist nun $K/\mathbb{Q}$ galoisch und $(K:\mathbb{Q})$ ungerade, so kann K keinen quadratischen Teilkörper besitzen, und $\sqrt{\operatorname{disc} K} \in R$ impliziert dann $\sqrt{\operatorname{disc} K} \in \mathbb{Z}$. Im Falle $(K:\mathbb{Q}) = 3$ gilt sogar die Umkehrung:

(4.1) <u>Ein kubischer Zahlkörper K ist genau dann galoisch, wenn $d = \operatorname{disc} K$ ein Quadrat in $\mathbb{Z}$ ist. Ist K nicht galoisch, so ist $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ der Galoisabschluß von $K/\mathbb{Q}$.</u>

Bew.: Es genügt zu zeigen, daß $K(\sqrt{d})$ galoisch ist. Mit $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ ist aber (wegen $\operatorname{disc}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = k^2 d$ für ein $k \in \mathbb{Z}$) $k\sqrt{d} = (\alpha-\alpha')(\alpha'-\alpha'')(\alpha''-\alpha)$, wo $\alpha, \alpha', \alpha''$ die Konjugierten von bezeichnen. Ist $f(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ das Minimalpolynom von α, so rechnet man leicht nach, daß $\alpha' - \alpha'' = \pm k\sqrt{d}/f'(\alpha) = \pm k\sqrt{d}/(3\alpha^2 + 2a_2\alpha + a_1)$, sowie $\alpha' + \alpha'' = a_2 - \alpha$ gilt. Damit ist $\alpha', \alpha'' \in K(\sqrt{d})$, also L normal über $\mathbb{Q}$.

Wir wollen zuerst den nicht-galoischen Fall untersuchen: sei dazu k_3 kubischer Körper mit Diskriminante d, d kein Quadrat in $\mathbb{Z}$, $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper und $K = k_2 k_3$ der normale Abschluß von $k_3/\mathbb{Q}$. Dann ist $K/\mathbb{Q}$ galoisch mit Galoisgruppe S_3 (die symmetrische Gruppe der Ordnung 6). Wir stellen jetzt die Hilbert'sche Untergruppenreihe für $K/\mathbb{Q}$ auf; aus dieser Tafel und dem Zerlegungsgesetz in quadratischen Zahlkörpern lesen wir sofort ab:

(4.3) <u>Sei k_3 kubischer Zahlkörper mit Diskriminante d; dann gilt für alle primen $p \in \mathbb{N}$:</u>
<u>$(d/p) = +1 \Leftrightarrow$ p ist voll zerlegt oder träge in k_3</u>
<u>$(d/p) = -1 \Leftrightarrow$ p ist Produkt zweier Primideale in k_3.</u>

Für abelsche Körper ist dies trivialerweise richtig, weil dann einerseits d ein Quadrat und somit nie $(d/p) = -1$ ist, und weil andererseits p nie das Produkt zweier Primideale wird.

Hilbertsche Untergruppenreihe für $K = k_2 k_3$

Hierbei ist
k_3 ein nichtabelscher kubischer Zahlkörper mit Diskriminante d
$d = d_2 f^2$, $d_2 = \text{disc } k_2$, $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$
$K = k_2 k_3$ der normale Abschluß von k_3.

(e, f, g)	p	k_2	k_3	Q	K_Z	K_T	K_1	K_2	K_3	K
(1, 1, 6)	$(\frac{d}{p}) = +1$	(1,1)	(1,1,1)	Q	K	K	K	K	K	K
(1, 3, 2)	$(\frac{d}{p}) = +1$	(1,1)	(3)	Q	k_2	K	K	K	K	K
(1, 2, 3)	$(\frac{d}{p}) = -1$	(2)	(1,2)	Q	k_3	K	K	K	K	K
(2, 1, 3)	$p \neq 2, p \nmid f, p \Vert d_2$	(1^2)	$(1,1^2)$	Q	k_3	k_3	K	K	K	K
	$p=2,\ 2 \nmid f,\ 4 \Vert d_2$			Q	k_3	k_3	k_3	K	K	K
	$p=2,\ 2 \nmid f,\ 8 \Vert d_2$			Q	k_3	k_3	k_3	k_3	K	K
(3, 1, 2)	$p \neq 3, p \Vert f, (d_2/p) = +1$	(1,1)	(1^3)	Q	k_2	k_2	K	K	K	K
	$p=3,\ 9 \Vert f,\ (d_2/3) = +1$			Q	k_2	k_2	k_2	K	K	K
(3, 2, 1)	$p \neq 3, p \Vert f, (d_2/p) = -1$	(2)	(1^3)	Q	Q	k_2	K	K	K	K
	$p=3,\ 9 \Vert f,\ (d_2/3) = -1$			Q	Q	k_2	k_2	K	K	K
(6, 1, 1)	$p=3,\ 3 \Vert f,\ 3 \Vert d_2$	(1^2)	(1^3)	Q	Q	Q	k_2	K	K	K
	$p=3,\ 9 \Vert f,\ 3 \Vert d_2$			Q	Q	Q	k_2	k_2	k_2	K

Hierbei bedeutet z.B. (1,2), daß p in k_3 Produkt zweier Primideale mit Trägheitsgrad 1, bzw. 2 ist, während $(1,1^2)$ die Zerlegung $(p) = P_1 P_2^2$ symbolisiert.

Eine genauere Untersuchung der Faktorisierung des Ideals (2) zeigt

4.3) Sei k_3 kubischer Zahlkörper mit Diskriminante d; dann bestehen nur die folgenden Möglichkeiten:

$d \equiv 8 \mod 16$: $(2) = 2_1 2_2^2$ (in k_3)

$d \equiv 4 \mod 16$: $(2) = 2_1^3$

$d \equiv -4 \mod 16$: $(2) = 2_1 2_2^2$

$d \equiv 1 \mod 8$: $(2) = 2_1 2_2 2_3$ oder $(2) = (2)$

$d \equiv 5 \mod 8$: $(2) = 2_1 2_2$

Der Beweis beruht auf der Berechnung der verschiedenen Relativdiskriminanten unter Berücksichtigung obiger Tafel.

Wenn wir nun einen kubischen Körper k_3 mit Diskriminante $d_3 = d_2 \cdot f^2$ gegeben haben und uns fragen, ob er normeuklidisch ist, so können wir nur dann mit (1.5) arbeiten, wenn es in k_3 rein verzweigte Primideale gibt. Da genau die Primteiler von f rein verzweigen, ist (1.5) für Körper mit f=1 nutzlos. Wir wollen daher folgendermaßen vorgehen: wir betrachten bei festem d_2 alle kubischen Körper k_3 mit $d_3 = d_2 f^2$; dabei beginnen wir mit dem einfachsten Fall $d_2 = -3$.

Kubische Zahlkörper mit Diskriminante $d_3 = -3f^2$ sind genau die "reinen" Zahlkörper $k_3 = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{m})$ (sh. z.B. Delone und Faddeev (1964) oder Cohn (1978, Übung 18.4). Wir notieren einige einfache Eigenschaften:

Sei $m = ab^2$ für gewisse $a,b \in \mathbf{Z}$ mit $(a,b)=1$, a und b quadratfrei, $\vartheta = \sqrt[3]{ab^2}$, $\vartheta' = \sqrt[3]{a^2b}$, $K = \mathbf{Q}(\vartheta) = \mathbf{Q}(\vartheta')$; dann gilt im Falle

$m \not\equiv \pm 1 \mod 9$: $\{1, \vartheta, \vartheta'\}$ ist GHB, disc $K = -27a^2b^2$;

$ab^2 \equiv a^2b \equiv 1 \mod 9$: $\{1, \vartheta, (1+\vartheta+\vartheta')/3\}$ ist GHB, disc $K = -3a^2b^2$.

Das Zerlegungsgesetz in R lautet

a) $p \nmid \text{disc } K$: $(p) = P_1P_2 \iff p \equiv 2 \mod 3$

$(p) = P_1P_2P_3 \iff p \equiv 1 \mod 3$, $x^3 \equiv m$ lösbar in $\mathbf{Z}$;

$(p) = (p) \iff p \equiv 1 \mod 3$, $x^3 \equiv m$ nicht lösbar in $\mathbf{Z}$;

b) $p \mid \text{disc } K$: $(p) = P^3 \iff p \neq 3$ oder $p=3$, $m \not\equiv \pm 1 \mod 9$

$(p) = P_1P_2^2 \iff p=3$ und $m \equiv \pm 1 \mod 9$

Schließlich ist $N_{K/\mathbf{Q}}(r+s\vartheta+t\vartheta^2) = r^3+ms^3+m^2t^3-3mrst$.

Da Cassels 1952 gezeigt hat, daß ein kubischer Zahlklörper mit negativer Dieskriminante nur dann normeuklidisch sein kann, wenn $|\text{disc } K| < 420$ ist, brauchen wir nur solche zu betrachten. Die Tafeln von Nakamula (1988) enthalten alle solchen Körper; aus ihnen liest man ab, daß unter ihnen genau die folgenden $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{m})$ Klassenzahl 1 haben: $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{m})$ für m = 2, 3, 5, 6, 10, 12, 17, 23, 29, 33, 41, 44, 45, 46, 53, 55, 59, 69, 71, 82, 99, 107, 116, 145, 179, 188, 197, 226, 332, 404, 575.

Es wird sich zeigen, daß unter diesen Körpern genau diejenigen mit $m = 2, 3, 10$ normeuklidisch sind; dieses Ergebnis stammt von Cioffari (1979), dessen Arbeit wir bei unserem Beweis folgen werden. Der Teil von Cioffaris Arbeit, der sich mit kubischen Zahlkörpern befaßt, enthält folgende Druckfehler:

1. Seite 392, Tabelle zum Korollar von Prop. 3: in der Zeile mit $d = 107$ muß in der Spalte p-e statt 91 die Zahl 93 stehen;
2. Seite 392, Prop. 5: es muß "$N(u) \equiv (-25)^3 \equiv +10 \bmod 53$" heißen statt "$\ldots \equiv -10 \bmod 53$"; entsprechend müssen die Vorzeichen in den beiden darauffolgenden Zeilen geändert werden;
3. Seite 393, Prop. 7: statt "belongs to ϑ (2); hence $a \equiv \vartheta \bmod 2$" muß es "belongs to ϑ^2 (2); hence $a \equiv \vartheta^2 \bmod 2$" heißen;
4. Seite 395, Prop. 10: in der Zeile $d=44$ der Tabelle muß $c = 5+2\vartheta + \vartheta^2/2$ stehen statt $c = 5+2\vartheta+\varphi$.
5. Seite 396, Prop. 12: statt $(a_1-b_ic_j)(a_2-b_ic_j)$ sollte $(a_1-\sqrt{b_ic_j})(a_2 \sqrt{b_ic_j})$ stehen, und Entsprechendes gilt für die beiden darauffolgenden Zeilen.

Nun gilt

(4.4) Sei $(K:\mathbb{Q}) = n \equiv 1 \bmod 2$, und seien die rationalen Primzahlen $p_1, \ldots, p_t$ paarweise verschieden und rein verzweigt in K, sowie $(p_1-1,n) = \ldots = (p_t-1,n) = 1$. Gibt es dann ein $e \in \mathbb{N}$ mit $1 < e < f = p_1 \cdot \ldots \cdot p_t$, sodaß weder e noch $f-e$ Norm eines Elements aus R sind, dann ist R nicht normeuklidisch.

Bew.: Die Voraussetzungen garantieren $(\varphi(f),n) = 1$; somit ist die Potenzierung mit n ein Automorphismus auf $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times$ und folglich e ein n-ter Potenzrest mod f. Die Behauptung folgt nun mit $a=e$, $b=f-e$ aus (1.6), denn wegen $(K:\mathbb{Q}) \equiv 1 \bmod 2$ ist b genau dann Norm, wenn $-b$ Norm ist.

(4.5) Für die folgenden Werte von m ist $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$ nicht normeuklidisch:
$m = 23, 29, 33, 41, 46, 59, 69, 71, 82, 107, 188, 197, 226, 332, 404, 575$.

Bew.: Wir verwenden (4.4) mit $t=1$ und $t=2$:

m	p_1	e	f-e
59	59	7	52
71	71	19	52
82	41	13	28
107	107	14	93
179	179	7	172
197	197	39	158
226	113	37	76
332	83	7	76
404	101	28	73

m	p_1	p_2	e	f-e
23	3	23	13	56
29	3	29	26	61
33	3	11	7	26
41	3	41	19	104
46	2	23	7	39
69	3	23	26	43
116	2	29	21	37
145	5	29	26	119
188	2	47	37	57
575	5	23	37	78

Beispielsweise ist für $m = 107 = 14 + 93$ $a = 14$ keine Norm aus R, weil es kein Ideal der Norm 7 gibt: die Kongruenz $x^3 \equiv 107 \bmod 7$ ist nämlich nicht lösbar, und nach dem Zerlegungsgesetz bleibt (7) träge in R. Ebenso ist $b = 93$ keine Norm, weil es in R kein Ideal der Norm 31 gibt.

Die jetzt noch verbliebenen Möglichkeiten $m = 2, 3, 5, 6, 10, 12, 17, 44, 45, 53, 55, 99$ lassen sich mit (4.4) allein nicht entscheiden. Wir werden daher in diesen Körpern nach Idealen I mit $M(K,I) > 1$ suchen. Besonders geeignet sind hierfür Teiler des Ideals $(u-1)$, u Einheit in R. Diesbezüglich gilt

(4.6) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$, $m \equiv 1 \bmod 2$ und $3 \nmid h$, wo $h = h(K)$ die Klassenzahl von K ist. Gibt es dann eine Primzahl $p \neq m$, die in K rein verzweigt, so ist $u \equiv 1 \bmod 2$ für jede Einheit u in R.

Bem.: wegen $(2) = 2_1 2_2$, $\|2_2\| = 4$, kommt der Teiler 2_2 von $(u-1)$ als Kandidat für I in Frage.

Bew. von 4.6: Sei $(p) = P^3$ in R; wegen $(h,3) = 1$ ist P ein Hauptideal in R, z.B. $P = (\pi)$ für ein $\pi \in R$. Damit wird $\pi^3 = \pm pu^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, wo u die FE von R ist. Indem man mit einer geeigneten Potenz von u multipliziert, kann man $k \in \{0, 1\}$ erreichen. Wäre $k=0$, so folgte $\pi = \sqrt[3]{p} \in K$, was wegen $p \neq m$ nicht der Fall ist. Indem wir notfalls u durch u^{-1} ersetzen, dürfen wir schließlich $k=1$ annehmen. Nun ist $(2) = 2_1 2_2$ in R, d.h. $\Phi(2) = \Phi(2_1)\Phi(2_2) = 3$, also $\pi^3 \equiv 1 \bmod 2$ wegen $(\pi, 2) = 1$. Damit ist dann $u \equiv u^k p = \pi^3 \equiv 1 \bmod 2$ qued.

Sei nun $m \equiv 1 \bmod 2$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$; dann ist $(2) = 2_1 2_2$ mit $\|2_1\| = 2$, $\|2_2\| = 4$. Setzt man $\vartheta = \sqrt[3]{m}$, so ist $\{1, \vartheta, 1+\vartheta\}$ ein primes Restsystem mod 2_2, und es gilt $\vartheta^2 \equiv 1+\vartheta \bmod 2_2$. Also ist 2_2 genau dann normeuklidisch, wenn die Restklassen ϑ, $1+\vartheta$ mod 2 Elemente der Norm < 4 enthalten. Wegen (4.6) enthalten diese Restklassen sicher keine Einheiten, sodaß hierfür nur Elemente der Norm 2 oder 3 in Frage kommen.

$m = 5$: hier ist $2_1 = (3-\vartheta^2)$, $(3) = Q^3$ mit $Q = (2-\vartheta)$, folglich gilt für alle Elemente α der Norm 2: $\alpha \equiv 3-\vartheta^2 \equiv 1+\vartheta^2 \equiv \vartheta \bmod 2_2$, für alle β mit $N_{K/\mathbb{Q}}(\beta) = 3$: $\beta \equiv 2-\vartheta \equiv \vartheta \bmod 2_2$. Also enthält die Restklasse $1+\vartheta$ mod 2_2 nur Elemente der Norm ≥ 5 (sogar ≥ 6 wegen $5_1 = (\vartheta)$).

$m = 45$: mit $\alpha = \vartheta^2/3$ ist $\{1, \vartheta, \alpha\}$ eine GHB, und man findet $2_1 = (22-5\vartheta-\alpha)$, $2_2 = (409 + 115\vartheta + 97\alpha)$, $3_1 = (12-\vartheta-2\alpha)$. Auch hier enthält die Restklasse $1+\vartheta$ mod 2_2 keine Elemente der Norm 2 oder 3 (man beachte $\alpha \equiv \vartheta^2 \equiv 1+\vartheta$ mod 2_2).

$m = 55$: mit $\alpha = (1+\vartheta+\vartheta^2)/3$ ist $\{1, \vartheta, \alpha\}$ GHB, $\alpha \equiv 0 \bmod 2_2$ und $2_1 = (341+71\vartheta+76\alpha)$, $(3) = 3_1 3_2^2$, $3_1 = (5-3\vartheta+\alpha)$, $3_2 = (5+\vartheta+\alpha)$, sodaß die Restklasse $\vartheta \bmod 2_2$ keine Elemente der Norm <4 enthält.

$m = 99$: Sei $\alpha = \vartheta^2/3$; dann wird $\{1, \vartheta, \alpha\}$ GHB, $2_1^2 = (16-5\vartheta+\alpha)$, $(3) = 3_1^3$ und $16-5\vartheta+\alpha \equiv 1 \bmod 2_2$. Ist daher π ein Element der Norm 2 in R, so ist $\pi^2 e = 16-5\vartheta+\alpha \equiv 1 \bmod 2_2$ für eine Einheit e. Wegen $e \equiv 1 \bmod 2$ und $\Phi(2_2)=3$ ist damit schon $\pi \equiv 1 \bmod 2_2$. Egal, in welcher Restklasse die Erzeugenden von 3_1 liegen, kann 2_2 nicht normeuklidisch sein.

$m = 6$: hier ist $u = 1-6\vartheta+3\vartheta^2$ eine FE von K, die Ideale (2) und (3) sind rein verzweigt, es ist $2_1 = (2-\vartheta)$, $3_1 = (3+2\vartheta+\vartheta^2)$, und die Restklasse $1+\vartheta \bmod 2_1$ enthält keine Elemente der Norm <4.

$m = 53$: mit $\alpha = (1-\vartheta+\vartheta^2)/3$ ist $\{1, \vartheta, \alpha\}$ eine GHB, und wir haben $(2)=2_1 2_2$, $\|2_1\| = 2$, $\|2_2\| = 4$, und $(53) = P^3$. Wir behaupten, daß die Restklasse $-25 \bmod 2_1 P$ keine Elemente der Norm <106 enthält. Ist nämlich $\pi \in R$, $\pi \equiv -25 \bmod P$, so folgt, da P rein verzweigt ist, $N_{K/Q}(\pi) \equiv (-25)^3 \equiv 10 \bmod 53$. Also ist $N_{K/Q}(\pi) \in \{-96, -43, 10, 63\}$. Nun sind die Zahlen 96 und 10 durch eine ungerade Potenz von 2 teilbar, und dies impliziert $\pi \equiv 0 \bmod 2_1$ im Widerspruch zu $\pi \equiv -25 \equiv 1 \bmod 2_1$.

Da weiter (7) und (43) in K träge sind, sind auch 63 und -43 keine Normen aus R. Dies war zu zeigen.

Damit sind von der Liste von S. 5 nur noch die Werte $m = 2, 3, 10, 12, 17, 44$ übrig; für $m = 12, 17, 44$ können wir den EA mit Hilfe von (1.10) ausschließen: dazu geben wir für diese m eine (fundamentale) Einheit u, die aus ihr resultierenden Schranken μ_1, μ_2, μ_3 aus (1.10) (zunächst mit $k=1$), ein $x \in K$ und schließlich $M(K,x)$:

m	u^{-1}	$\lvert u \rvert$	μ_1	μ_2	μ_3
12	$1+3\vartheta-3\vartheta'$	≈ 165	5.5	2.4	1.1
17	$18-7\vartheta$	≈ 972	9.91	3.9	1.5
44	$(113-2\vartheta-17\vartheta')/3$	≈ 4007	15.89	4.5	1.28

m	x	M(K,x)
12	$(12+15\vartheta+8\vartheta')/18$	169/162
17	$(-376+466\vartheta-19\varphi)/1028$	1115/1028
44	$(8+12\vartheta+36\vartheta')/59$	81/59

Hierbei ist = $(1 - \vartheta + \vartheta^2)/3$; außerdem gilt für das bei m = 44 angegebene x die Kongruenz $x \equiv 12/(5 + 2\vartheta + \vartheta')$ mod R (sh. Berichtigung 4. vor (4.4)). Damit haben wir

(4.7) $\underline{K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{m})}$ <u>ist genau für m = 2, 3, 10 normeuklidisch</u>.

Daß diese Körper tatsächlich normeuklidisch sind, haben Godwin (m = 2), Taylor (m = 3, 10) und auch Cioffari (m = 2, 3, 10) gezeigt; dies kann man mit einem Computer leicht nachprüfen. Darüberhinaus kann man für $K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ das euklidische Minimum M(K) = 1/2 bestimmen.

Ich habe mich (mit Hilfe der Klassenkörpertheorie) davon überzeugt, daß von den Körpern der Form $d = -4f^2$ höchstens diejenigen mit f = 9, 11 und 83 normeuklidisch sind; für die ersten beiden hat Taylor den EA nachgewiesen. Für den Körper mit f=83 ist es ohne Kenntnis der erzeugenden Gleichung recht schwer, weitere Aussagen zu machen. Ich habe deswegen auch auf eine genaue Darstellung der nötigen Rechnungen verzichtet.

In den allermeisten Fällen wird man zur Entscheidung, ob ein kubischer Körper normeuklidisch ist oder nicht, wohl (1.10) benutzen; ohne eine Tafel kubischer Körper, die neben Diskriminante auch Grundeinheit und Klassenzahl angibt, kommt man daher nicht weiter.

Ich habe versucht, für kubische Körper mit kleiner Diskriminante ($|d|<1300$) eine solche Tafel aufzustellen (sh. IV); diese enthält neben der erzeugenden Gleichung die Klassenzahl, sowie eine Einheit. Es muß dabei bemerkt werden, daß die Tafel keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt, und daß die angegebenen Einheiten nicht notwendig fundamental sind. Weiter habe ich für die Körper in der untenstehenden Tabelle die euklidischen Minima bestimmt.

Der Tafel kann man übrigens entnehmen, daß der kubische Zahlkörper mit disc K = −283 semi-euklidisch ist und euklidische Tiefe 1 hat.

Das euklidische Minimum des Körpers mit Diskriminante −87 konnte ich bisher nicht bestimmen; wahrscheinlich(?) ist jedoch M(K) = 1/3, wobei dieses Minimum außer an den beiden oben angegebenen rationalen Punkten noch an unendlich vielen irrationalen Punkten angenommen wird (wie bei $\mathbf{Q}(\sqrt{13})$).

Der Ring $R = \mathbb{Z}[\vartheta]$, wo ϑ eine Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^3+x^2+3x-1$ ist, hat Diskriminante −176 und ist im Körper mit der Diskriminante −44 enthalten. R ist ein weiteres Beispiel für einen nicht ganz abgeschlossenen Ring mit M(f) = 1, wobei M(f) mod R im Punkt $(1+\vartheta^2)/2$ angenommen wird.

disc K	M(K)	C_1	
-23	1/5	$(1+\vartheta+2\vartheta^2)/5$, $(2+2\vartheta-\vartheta^2)/5$	
-31	1/3	$(1-\vartheta-\vartheta^2)/3$	
-44	1/2	$(1+\vartheta^2)/2$	
-59	1/2	$(1+\vartheta+\vartheta^2)/2$	
-76	1/2	$(1+\vartheta^2)/2$	
-83	1/2	$(1+\vartheta+\vartheta^2)/2$	
-87	1/3	$(1-\vartheta^2)/3$, $(1+\vartheta+\vartheta^2)/3$	
-104	1/2	$(\vartheta+\vartheta^2)/2$	
-107	1/2	$(3+\vartheta-3\vartheta^2)/8$, $(1+\vartheta+\vartheta^2)/2$	
-108	1/2	$\sqrt[3]{4}/2$	
-116	1/2	$(\vartheta+\vartheta^2)/2$, $(1+\vartheta^2)/2$	
-135	3/5	$(2+2\vartheta-2\vartheta^2)/5$	
-139	1/2	$(1+\vartheta+\vartheta^2)/2$	
-140	1/2	$(3+2\vartheta-3\vartheta^2)/10$, $(1+\vartheta^2)/2$	
-152	1/2	$(\vartheta+\vartheta^2)/2$, $\vartheta^2/2$	
-172	3/4	$(\vartheta+\vartheta^2)/2$	
-175	3/5	$(2-\vartheta+2\vartheta^2)/5$	
-199	1	$(3+\vartheta-3\vartheta^2)/7$	
-283	3/2	$(1+\vartheta+\vartheta^2)/2$	$M_2<1$
-307	9/8	$(1+\vartheta^2)/2$	
-528	5/2	$(1+\vartheta^2)/2$	
-891	7/2	$(1+\vartheta+\vartheta^2)/2$	

Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß sich die in (1.10) errechneten Schranken μ_1 im kubischen Fall noch verbessern lassen; dies wollen wir nun tun. Dazu betrachten wir zuerst den rein kubischen Fall $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$, $\vartheta^3 = m$, und wählen die $\mathbb{Q}$-Basis $\{1, \vartheta, \vartheta^2\}$. Dann gilt mit den Bezeichnungen von (1.10) und $v:=|z|$, $w:=|z'|$ $|N_{K/\mathbb{Q}}(z)| = vw^2 \leq k$, außerdem $v \leq V$ und $w \leq W$ (wo wir V und W noch geeignet bestimmen werden; in (1.10) war $V = W = \sqrt[3]{ku}$).

Um $f(v,w) = v+2w$ auf dem Gebiet $0 \leq v \leq V$, $0 \leq w \leq W$ nach oben abzuschätzen, bemerken wir, daß f ihr Maximum höchstens auf dem Rand annimmt. Ist aber $v = V$, so folgt $w \leq k/v = k/V$ und damit $v+2w \leq V + 2\sqrt{k/V}$. Im Falle $w = W$ dagegen folgt entsprechend $v \leq k/W^2$ und $v+2w \leq 2W + k/W^2$.

Also haben wir insgesamt $v+2w \leq \max\{V + 2\sqrt{k/V}\ ,\ 2W + k/W^2\}$. Will man nun erreichen, daß $V = 2W$ wird, so muß man nur $\sqrt[3]{4k/u^2} \leqq |z| \leqq \sqrt[3]{4ku}$ wählen und erhält dann $|z'| \leqq \sqrt[3]{ku/2}$, also $V = \sqrt[3]{4ku} = 2W$ und $v + 2w \leqq \sqrt[3]{4ku} + \max\{2\sqrt{k/V}\ ,\ k/W^2\} = \sqrt[3]{4ku} + \sqrt[3]{4k/\sqrt{u}} =: S$ wegen $2\sqrt{k/V} = \sqrt[3]{4k/\sqrt{u}}$ und $k/W = \sqrt{4k/u}$. Jetzt folgen die Schranken $\mu_1 = S/3$, $\mu_2 = S/3\vartheta$, $\mu_3 = S/3\vartheta^2$ (mit $\vartheta^3 = m$).

Die Asymmetrie im Beweis läßt mich vermuten, daß diese Schranken noch nicht bestmöglich sind. Allerdings liefern diese Überlegungen schon weit bessere Schranken als (1.10); so findet man z.B. für $m = 12, 17, 44$

m	μ_1	μ_2	μ_3
12	2.92	1.27	0.59
17	5.25	2.05	0.80
44	8.41	2.38	0.68

Beachtet man, daß die Rechenzeit in etwa proportional zu dem Produkt $\mu_1\mu_2\,\mu_3$ ist und vergleicht diese Schranken mit den etwas weiter oben erhaltenen, so wird einem der Fortschritt gegenüber (1.10) schnell klar.

Im allgemeinen Fall gehen wir einen andern Weg als in (1.10) : wir benutzen die $\mathbf{Q}$-Basis $\{1, \alpha, \beta\}$; anstatt aber jetzt die Dualbasis zu benutzen, multiplizieren wir z mit einem Element der "Spur" 0 und bilden dann die "Spur" ("Spur" steht dabei in Anführungszeichen, weil z.B. $\alpha'-\alpha''$ gar nicht in K liegt und man folglich $(\alpha'-\alpha'')+(\alpha''-\alpha)+(\alpha-\alpha'')$ nicht als Spur von $(\alpha'-\alpha'')$ bezeichnen darf). So gilt z.B.
$\sum z(\alpha'-\alpha'') = r_3 m,\quad \sum z(\beta'-\beta'') = r_2 m,\quad \sum z(\alpha'\beta''-\alpha''\beta') = r_1 m,$
wobei wir die Summanden als Elemente des normalen Abschlußes $L = K(\sqrt{d})$ von K auffassen und über die Automorphismen von $L/\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ summieren (d.h. z.B. $\sum z' = z'+z''+z$). Dabei ist

$$m = \alpha'\beta+\alpha''\beta'+\alpha\beta''-\alpha\beta'-\alpha'\beta''-\alpha''\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \end{vmatrix} = \pm\sqrt{D},$$

wo bekanntlich $D = \operatorname{disc}_{K/\mathbf{Q}}(1, \alpha, \beta)$ ist.

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man nun
$|m||r_3| = |\sum z(\alpha'-\alpha'')| \leq |z||\alpha'-\alpha''|+|z'||\alpha''-\alpha| + |z''||\alpha-\alpha'| \leq \sqrt[3]{ku}(|\alpha'-\alpha''|+2|\alpha-\alpha'|)$
und entsprechend
$|m||r_2| \leq \sqrt[3]{ku}(|\beta'-\beta''|+2|\beta-\beta'|)$, sowie $|m||r_1| \leq \sqrt[3]{ku}\,(|\alpha'\beta''-\alpha''\beta'|+2|\alpha\beta'-\alpha'\beta|)$.
Division durch $|m| = \sqrt{-D}$ liefert nun die gewünschten Schranken für r_1, r_2, r_3. Wir halten fest:

(4.8) <u>Sei K ein kubischer Körper mit Einheitenrang 1, u eine Einheit mit $u>1$ und $x_1,\ldots,x_t \in K$ seien Punkte, die von u permutiert werden. Weiter sei $\{1,\alpha,\beta\}$ eine $\mathbf{Q}$-Basis von K. Ist dann $M(K, x_1) < k$, so gibt es ein $z = r_1+r_2\alpha+r_3\beta \in K$ mit den Eigenschaften</u>

a) $z \equiv x_j \bmod R$ für ein $j \in \{1,\ldots,t\}$;

b) $|N_{K/\mathbf{Q}}(z)| < k$;

c) $|r_i| < \mu_i$ für $i = 1, 2, 3$ und
$\mu_1 = \sqrt[3]{ku}\cdot(|\alpha'\beta''-\alpha''\beta'|+2|\alpha\beta'-\alpha'\beta|)/\sqrt{-D}$,
$\mu_2 = \sqrt[3]{ku}\,(|\beta'-\beta''|+2|\beta-\beta'|)/\sqrt{-D}$,
$\mu_3 = \sqrt[3]{ku}(|\alpha'-\alpha''|+2|\alpha-\alpha'|)/\sqrt{-D}$,

wobei $D = \operatorname{disc}_{K/\mathbf{Q}}(1, \alpha, \beta)$ ist.

Mit Hilfe von (4.8) lassen sich einige der schon von Taylor untersuchten kubischen Körper als nicht normeuklidisch nachweisen: man läßt y durch die Restklassen mod (u-1) laufen und bestimmt $M(K,x)$ für $x = \frac{y}{u-1}$. Es scheint erfolgversprechend zu sein, mit dieser Methode diejenigen kubischen Körper zu untersuchen, von denen man bisher nicht weiß, ob sie normeuklidisch sind oder nicht.

In seiner Arbeit aus dem Jahre 1954 hat Swinnerton-Dyer unter anderem folgendes Ergebnis (ohne Beweis) angegeben:

> Ist $\{1, \vartheta, \vartheta^2\}$ GHB von $\mathbb{Q}(\vartheta)$, $\vartheta^3+2a\vartheta-1 = 0$, und $a \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, dann ist $M(K) = (a^2-a+1)/2$, und dieses Minimum wird mod R genau im Punkt $P = (1/2, 1/2, 1/2)$ angenommen.

Wir werden nun zeigen, daß sogar gilt:

(4.9) <u>Sei $\vartheta^3+2a\vartheta-1 = 0$, $R = \mathbb{Z}[\vartheta]$ und f der Absolutbetrag der Norm. Dann gilt für alle $a \in \mathbb{N}$: $M(K) = M(\underline{K}) = (a^2-a+1)/2$, und dieses Minimum wird mod R nur in $(1/2, 1/2, 1/2)$ angenommen.</u>

In diesem Fall ist übrigens $\mathrm{disc}_{K/\mathbb{Q}}(1, \vartheta, \vartheta^2) = -(32a^3+27)$ und folglich $M(K) \approx |d|^{2/3}/16\sqrt[3]{2}$. Für a = 1, 2, 3 erhält man aus (4.9) $\mathrm{disc}(\vartheta) = -59, -283, -891$; in diesen Fällen haben wir das erste Minimum bereits per Computer bestimmt und $M(K) = 1/2, 3/2, 7/2$ gefunden in Übereinstimmung mit (4.9). Beim Beweis dürfen wir uns daher auf $a \geq 4$ beschränken.

Die Begleitmatrix von $z = r+s\vartheta+t\vartheta^2$ bezüglich der Basis $\{1, \vartheta, \vartheta^2\}$ bestimmt sich zu
$$\begin{vmatrix} r & s & t \\ t & r-2at & s \\ s & t-2as & r-2at \end{vmatrix}$$
Hierbei stehen in der zweiten und dritten Zeile jeweils die Koordinaten von $z\vartheta$ und $z\vartheta^2$. Bildung der Determinante liefert die Norm
$$N(z) = r^3+s^3+t^3-3rst+2ars^2+2ast^2-4atr^2+4a^2rt^2.$$
Da wir z mod R so verschieben können, daß $-1/2 \leq r, s, t \leq 1/2$ wird, finden wir sofort
$$|N(z)| \leq 1/8 + 1/8 + 1/8 + 3/8 + a/4 + a/4 + a/2 + 2a^2t^2 = 3/4 + a + 2a^2t^2.$$

Für jeden Ausnahmepunkt z mit $|N(z)| \geq k = (a^2-a+1)/2$ gilt also $2a^2t^2 \geq (2a^2-6a-1)/4$, d.h. $t^2 \geq (2a^2-6a-1)/8a^2$; für alle $a \geq 3$ hat man die Abschätzung $(2a^2-6a-1)/8a^2 \geq (\frac{1}{2} - \frac{4}{5a})^2$, und wir sehen $|t| \geq \frac{1}{2} - \frac{4}{5a}$.

Der Koeffizient von ϑ^2 in $z\vartheta^{-1}$, z und $z\vartheta$ ist bzw. r, t und s; folglich gelten für $a \geq 3$ auch die Abschätzungen $|r| \leq \frac{1}{2} - \frac{4}{5a}$ und $|s| \leq \frac{1}{2} - \frac{4}{5a}$. Indem wir wieder den Fundamentalbereich $F = (-0.5, 0.5)\times(-0.5, 0.5)\times(-0.5, 0.5)$ ersetzen durch z.B. $F' = (0,1)\times(-1, 0)\times(0, 1)$ (diese Wahl von F' wird von der Überlegung geleitet, daß $|N(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})| = k$, aber $|N(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})| = a^2/2 > k$ ist), bekommen wir die einzige Ausnahmemenge $S = (\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta)\times(-\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta)\times(\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta)$ mit $\delta = \frac{4}{5a}$.

Sei nun $z \in S$; wir wollen $|N(z)|$ nun noch einmal nach oben abschätzen in der Hoffnung, wegen $z \in S$ bessere Schranken zu erhalten. Indem wir z notfalls mit -1 multiplizieren und eine entsprechende Rechnung durchführen, dürfen wir OBdA $\frac{1}{2}-\delta \le r \le \frac{1}{2}$ annehmen und finden nach etwas Rechnung $|N(z)| \le 3a\delta + \delta^2 + \frac{1}{2} - \frac{a}{2} + 2a^2t^2$. Wie oben erhält man hieraus die Abschätzung $t^2 \ge 1/4 - 6/5a^2 - 2/5a^3$, und für alle $a \ge 4$ liefert dies $|t - \frac{1}{2}| \le \frac{1}{3a}$. Wie oben folgt nun auch $|r - \frac{1}{2}| \le \frac{1}{3a}$ und $|s - \frac{1}{2}| \le \frac{1}{3a}$.

Jetzt beachten wir $z\vartheta = t + (r-2at)\vartheta + s\vartheta^2$; da mit z auch $z\vartheta$ Ausnahmepunkt ist, muß $|r-2at + b + \frac{1}{2}| \le \frac{1}{3a}$ für ein $b \in \mathbb{Z}$ sein. Etwas Rechnung zeigt $b = a-1$, und es folgt nach (2.1), daß $x = -((a-1)\vartheta + \vartheta^2)/(\vartheta - 1) = (1-\vartheta+\vartheta)/2$ der einzig mögliche Ausnahmepunkt von S ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $M(K,x) = (a^2-a+1)/2$ gilt. Dies macht man wie in der Arbeit von Swinnerton-Dyer; man muß lediglich dessen asymptotische Abschätzungen durch explizite ersetzen, was nicht schwer ist.

Schließlich geben wir noch einige Beispiele für 2-stufig normeuklidische kubische Körper:

1. disc $K = -199$: dieser Körper wird durch eine Nullstelle α des Polynoms $f(x) = x^3+4x^2+x+1$ erzeugt, $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ ist GHB, wir haben die Faktorisierungen $(2) = (2)$, $(3) = 3_1 3_2$, $(5) = (5)$ und $(7) = 7_1\, 7_2 7_3$. Hierbei ist $3_1 = (\alpha+1)$, $7_1 = (\alpha-1)$, $7_2 = (\alpha+2)$, $7_3 = (\alpha+3)$. Da die Einheit α fundamental ist, folgt leicht $M(K,7_1) = 1$, da die Restklassen 2, 3 mod 7_1 nur Elemente der Norm ≥ 7 enthalten. Nach Taylor gilt hier sogar $M(K) = 1$; jedenfalls ist K nicht normeuklidisch. Um zu zeigen, daß K wenigstens 2-stufig normeuklidisch ist, müssen wir eine 2-Folge der Länge ≥ 4 finden. Da die Ideale (2), 7_2 und 7_3 ein PERS besitzen und $|N_{K/\mathbf{Q}}(\alpha+4)| = 3$ ist, ist $0, 1, 2, \alpha+2, \alpha+3, \alpha+4$ eine 2-Folge der Länge 6, und es folgt, daß K 2-euklidisch ist.

2. disc $K = -351$: K wird von einer Nullstelle α des Polynoms $f(x) = x^3+3x+3$ erzeugt; wir haben die Faktorisierungen $(2) = (2)$, $(3) = P^3$, $(5) = (5)$, $(7) = 7_1 7_2$, $(11) = 11_1 11_2 11_3$, und mit $N = |N_{K/\mathbf{Q}}|$ gilt $N(\alpha) = 3$, $N(\alpha+1) = 1$, $N(\alpha+2) = 11$, $N(\alpha-1) = 7$, $N(\alpha-2) = 17$, $N(\alpha^2-\alpha+1) = 19$, $N(\alpha^2-\alpha) = 21$. Man kann dann nachprüfen, daß $0, 1, 2, \alpha, \alpha+1, \alpha^2+1$ eine 2-Folge ist, und dies genügt um zu zeigen, daß K 2-euklidisch ist. Daß K nicht normeuklidisch ist, sieht man leicht, wenn man sich die Elemente in der Restklasse 5 mod 11_1 betrachtet, wo $11_1 = (\alpha+2)$ ist.

Wir wollen nun noch etwas zur Situation in totalreellen kubischen Zahlkörpern sagen. Hier weiß man nur, daß die Anzahl der zyklischen normeuklidischen Körper endlich ist (Heilbronn 1950). Smith hat 1969 die Körper mit Diskriminante $< 10^8$ mit einem Computer untersucht und dabei festgestellt, daß der EA höchstens dann existiert, wenn $\sqrt{d} = 7, 9, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 103, 109, 127, 157$ ist. Darüberhinaus hat er für die Werte $\sqrt{d} \leq 43$ und $\sqrt{d} = 73$ das euklidische Minimum $M(K)$ bestimmt und gezeigt, daß K für $\sqrt{d} \leq 67$ normeuklidisch ist, für $\sqrt{d} = 73$ dagegen nicht. Die Körper mit $\sqrt{d} = 103, 109, 127, 157$ sind nicht untersucht worden.

Das Kriterium für die Nichtexistenz des EA, das sowohl Heilbronn, als auch Smith benutzt haben, ist das folgende:

(4.10) Sei $p \equiv 1 \bmod 6$ prim und χ ein nichttrivialer kubischer Charakter mod p. Gibt es dann $r, s, t, u \in \mathbb{N}$ mit $p = rs+tu$, $(r,s)=(t,u)=1$, $\chi(rs) = \chi(tu) = 1$, $\chi(r) \neq 1$, $\chi(s) \neq 1$, $\chi(t) \neq 1$, dann ist K nicht normeuklidisch.

Bew.: Wegen $\chi(rs) = 1$ ist $a = rs$ kubischer Rest mod p, während die andern an r, s, t, u gestellten Bedingungen garantieren, daß weder rs noch $-tu$ Norm aus R sind. (1.6) liefert dann die Behauptung.

Beispiele:

p	r	s	t	u
79	2	5	3	23
97	2	11	3	25
139	2	3	7	19
151	2	43	5	13
163	2	11	3	47
181	2	11	3	53
193	2	37	7	17
199	2	41	9	13

Zur Berechnung des kubischen Charakters χ hat Smith eine Primitivwurzel herangezogen. Benutzt man stattdessen das kubische Reziprozitätsgesetz (sh. z.B. Ireland u. Rosen 1982), läßt sich die Rechenzeit wesentlich verkürzen, und man erhält z.B.

(4.11) Sei K zyklischer kubischer Zahlkörper mit Diskriminante d. Ist dann $157^2 \leq d \leq 2.5 \cdot 10^{11}$, so ist K nicht normeuklidisch.

Da es unwahrscheinlich ist, daß für einen Körper mit disc $K > 2.5 \cdot 10^{11}$ eine Darstellung wie in (4.10) nicht existiert, dürfte die oben gegebene Liste mit zyklischen kubischen Körpern, die möglicherweise normeuklidisch sind, vollständig sein.

1971 hat Smith euklidische Minima einiger reeller kubischer Körper bestimmt und außerdem den EA in zahlreichen derartigen Körpern nachgewiesen. In die Liste mit Diskriminanten normeuklidischer Körper hat sich ein Druckfehler eingeschlichen: statt disc K = 1994 muß disc K = 1944 stehen.

Die Ergebnisse von Smith lassen sich relativ problemlos ausdehnen: so kann man z.B. zeigen, daß die kubischen Körper mit Diskriminante disc K = 2021, 2024, 2057, 2101, 2213, normeuklidisch sind.

An dieser Stelle wollen wir noch zeigen, wie man auch nicht rein verzweigte Ideale zur Abschätzung von M(K) verwenden kann. Es gilt nämlich

(4.12) <u>Sei K Zahlkörper vom Grad n, R der Ring ganzer Zahlen in K, und es sei $pR = P^{n-1}Q$ die Faktorisierung des Ideals (p) in R. Ist dann $\pi \equiv a \bmod P$ und $\pi \equiv b \bmod Q$ für $a, b \in \mathbb{Z}$, so gilt</u> $N_{K/\mathbb{Q}}(\pi) \equiv a^{n-1}b \bmod p$.

Bew.: Man geht vor wie in (1.1), (1.2) und (1.3); man beachte nur, daß das Minimalpolynom f eines $\pi \in P$ die Form $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_o$ hat, wobei für $i = 0, \dots, n-2$ die Kongruenz $a_i \equiv 0 \bmod p$ gilt und $a_{n-1} \equiv \pi \bmod Q$ ist.

Man kann hier auch ein Analogon zum Eisensteinschen Irreduzibilitätskriterium beweisen: ist $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_o \in \mathbb{Z}[x]$, $a_i \equiv 0 \bmod p$ für $0 \le i \le n-2$, $a_o \not\equiv 0 \bmod p^2$, und hat f keinen Linearfaktor $x-a$ (mit $a \equiv a_{n-1} \bmod p$), dann ist f irreduzibel.

Benutzt man lokale Methoden (sh. Ishida 1976), so kann man (4.12) ohne Schwierigkeiten verallgemeinern zu

(4.13) <u>Sei $pR = P_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot P_g^{e_g}$ die Faktorisierung von (p) in einem algebraischen Zahlkörper. Dann gilt für alle $\alpha \in R$:</u> $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) \equiv a_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot a_g^{e_g}$, <u>wobei $a_i \in \mathbb{Z}$ ganze rationale Zahlen sind.</u>

Wir geben nun einige Beispiele: Sei K kubischer Zahlkörper mit $5 \| \mathrm{disc}\, K$; dann ist $(5) = S_1 S_2^2$. Ist jetzt $\alpha \in R$, $\alpha \equiv \pm 2 \bmod S_1$ und $\alpha \equiv b \bmod S_2$, so folgt aus (4.12), daß $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) \equiv \pm 2b^2 \equiv 0, \pm 2 \bmod 5$ ist. Wegen $\alpha \neq 0$ ist S_1 kein euklidisches Ideal, wenn es in R keine Elemente der Norm 2 oder 3 gibt. Man erhält so

disc K	$M(K, S_1)$
985	1
1345	7/5
3305	≥ 1
4345	≥ 1
6185	≥ 1

Bem.: Ich bin nicht mehr dazu gekommen, $M(K, S_1)$ in allen Fällen zu bestimmen oder zu untersuchen, ob sich diese Überlegung auch mit Primidealen über andern $p \equiv 1 \bmod 4$ erfolgreich durchführen läßt.

Anmerkungen zu § 4

1. Kubische Zahlkörper mit negativer Diskriminante

1892: Markov gibt Einheiten von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$, $m \le 70$;

1940: Delone und Faddeev veröffentlichen eine Tafel kubischer Körper mit $-999 \le \operatorname{disc} K \le -23$;

1949: Es ist $M(K) = 1/5$ für den Körper mit $\operatorname{disc} K = -23$ (Prasad)

1950: Es gibt nur endlich viele normeuklidische kubische Körper mit negativer Diskriminante (Davenport)

1952: Cassels verbessert die Davenport'sche Schranke: es gilt $|d| < 420$

1954: Swinnerton-Dyer beweist für komplexe kubische Körper mit $d \le -1237$ die Ungleichung $M(K) \le |d|^{2/3}/16\sqrt[3]{2}$ und zeigt, daß diese bestmöglichst ist.

1957: Godwin gibt eine Tafel komplexer kubischer Körper

1967: Die Körper mit $-23 \le \operatorname{disc} K \le -152$ sind normeuklidisch (Godwin)

1973: Angell tabelliert die kubischen Körper mit $-23 \le \operatorname{disc} K < -20000$ und gibt jeweils FE und Klassenzahl

1976: Taylor bestimmt alle normeuklidischen Körper mit $|\operatorname{disc} K| < 680$

1979: Cioffari findet alle rein kubischen Zahlkörper mit EA

1988: Nakamula veröffentlicht eine Tafel rein kubischer Körper und gibt FE samt Klassenzahl

2. Kubische Zahlkörper mit positiver Diskriminante

1923: Remak zeigt $M(K) < \sqrt{d}/8$; dies impliziert insbesondere, daß der kubische Körper mit $\operatorname{disc} K = 49$ normeuklidisch ist

1947: Für die Körper mit $\operatorname{disc} K = 49, 81$ wird $M(K)$ bestimmt (Davenport)

1950: Es gibt nur endlich viele zyklische kubische Körper mit EA; eine obere Schranke wird nicht gegeben (Heilbronn)

1951: Für den Körper mit $\operatorname{disc} K = 148$ wird $M(K)$ bestimmt (Clarke)

1954: Samet bestimmt $M(K)$ für eine Reihe kubischer Körper

1956: Billevic veröffentlicht eine Tafel kubischer Körper mit $\operatorname{disc} K \le 1296$ und gibt zwei Fundamentaleinheiten

1959: Godwin und Samet tabellieren reelle kubische Körper mit $\operatorname{disc} K < 20.000$

1969: Die zyklischen Körper mit $\operatorname{disc} K < 10^8$ werden untersucht (Smith)

1971: Smith bestimmt die euklidischen Minima zahlreicher kubischer Körper und findet alle normeuklidischen Körper mit $\operatorname{disc} K \le 1957$

1975: Gras gibt eine Tafel zyklischer Körper samt Einheiten und Klassenzahl

1985: Ennola und Turunen bestimmen die reellen kubischen Körper mit $\operatorname{disc} K < 5 \cdot 10^5$

1987: Cusick und Schoenfeld tabellieren die reellen kubischen Körper mit $\operatorname{disc} K \le 6885$ und geben Klassenzahl und Grundeinheiten an

1988: Llorente und Quer berechnen alle kubischen Körper mit $0 < \operatorname{disc} K < 10^7$.