§ 3 Quadratische Zahlkörper

Daß quadratische Zahlkörper $K = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ genau für die Werte $d = -11, -8, -7, -4, -3, 5, 8, 12, 13, 17, 21, 24, 28, 29, 33, 37, 41, 44, 57, 73, 76$ normeuklidisch sind (wo $d = \operatorname{disc} K$ die Diskriminante von K bezeichnet), ist ein bereits klassisches Ergebnis. Wir werden sehen, daß sich der Beweis hierfür recht übersichtlich und verhältnismäßig kurz darstellen läßt, wenn man (1.5) und (1.8) konsequent anwendet. Außerdem ermöglichen die Ideen, die hier vorgestellt werden, zumindest teilweise die Klassifikation von normeuklidischen Ringe höheren Grades (sh. insbesondere § 5).

Wir stellen nun einige bekannte Eigenschaften quadratischer Zahlkörper zusammen: so ist jeder quadratische Zahlkörper von der Form $K = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ für ein quadratfreies $m \in \mathbf{Z}$. Weiter gilt im Falle

$m \equiv 1 \mod 4$: $\{1, \frac{1+\sqrt{m}}{2}\}$ ist GHB, $\operatorname{disc} K = m$,
$m \equiv 2,3 \mod 4$: $\{1, \sqrt{m}\}$ ist GHB, $\operatorname{disc} K = 4m$.

Bezeichnet $(\ /p)$ das Kroneckersymbol, so läßt sich das Zerlegungsgesetz (darunter verstehen wir eine Beschreibung des Verhaltens von Primidealen bei Körpererweiterung) wie folgt beschreiben:

I. $(d/p) = +1$: $(p) = P_1P_2$, $\|P_1\| = \|P_2\| = p$ (p heißt ***zerlegt***)

II. $(d/p) = -1$: $(p) = P$, $\|P\| = p^2$ (p heißt ***träge***)

III. $p \mid d$: $(p) = P^2$, $\|P\| = p$ (p heißt ***rein verzweigt***).

Die Einheitengruppe $R^\times$ von quadratischen Zahlringen haben eine recht einfache Struktur. Ist K imaginärquadratisch, so ist $R^\times = \{\pm 1\}$ außer für $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ und $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, wo die 4. bzw. 6. Einheitswurzeln ganz $R^\times$ bilden. In reellquadratischen Zahlkörpern läßt sich nach dem Dirichlet'schen Einheitensatz jede Einheit $e \in R^\times$ in der Form $e = \pm u^k$ für ein $k \in \mathbf{Z}$ schreiben, wobei u die Fundamentaleinheit von K bezeichnet (diese wird i.A. durch die Forderung $u > 1$ eindeutig festgelegt).

Auch die Parität der Klassenzahl h(K) kann man leicht angeben. Dazu sei $m \in \mathbf{N}$; wir unterscheiden dann

$K = \mathbf{Q}(\sqrt{-m})$: h(K) ist genau dann ungerade, wenn $m = 1, 2$ oder $m \equiv 3 \mod 4$ prim ist, d.h. genau dann, wenn disc K eine Primzahlpotenz ist.

$K = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$: h(K) ist genau dann ungerade, wenn gilt:

a) $m = p$ ist prim;
b) $m = pq$, p und q prim, $p = 2$ oder $p \equiv 3 \mod 4$, $q \equiv 3 \mod 4$.

Für imaginärquadratische K steht ein elementarer Beweis bei Connell (1962), für reellquadratische bei Redei (1960). Einen anderen Zugang zu diesen Ergebnissen ermöglicht die Geschlechtertheorie von Gauß (sh. Zagier 1981). Schließlich kann man aus der analytischen Klassenzahlformel einen weiteren Beweis gewinnen (ein Teil eines solchen Beweises steht bei Hasse (1964, Va, Vb)).

Da euklidische Ringe Klassenzahl 1 haben, brauchen wir nur die oben angegebenen Möglichkeiten in Betracht zu ziehen. Als der einfachste Fall hat sich derjenige herausgestellt, wo disc $K \equiv 0 \bmod 4$ ist. Daß K dann höchstens für die Werte $m = 2, 3, 6, 7, 11, 19$ normeuklidisch sein kann, haben unabhängig voneinander J. Fox (1935) und E. Berg (1935) gezeigt (die Arbeit von J. Fox taucht in den Literaturangaben fast aller Autoren unter dem Namen Fox Keston auf; wir halten uns hier an Bull. Am. Math. Soc. 41 (1935), p. 186, wo ihr Name mit Jeanette Fox angegeben wird). Die einfachsten Beweise im Falle $4 \mid$ disc K stammen aber wohl von Behrbohm und Redei (1936), und diese wollen wir nun auch vorstellen. Zuerst zeigen wir

(3.1) <u>Ist $a \in \mathbb{N}$ und $(m/a)=-1$, so ist weder a noch $-a$ Norm aus $D(m)$.</u>

Bew.: Wegen $(m/a)=-1$ enthält a einen Primfaktor p, der in a ungerade oft aufgeht (d.h. es ist $a=p^e b$, $p \nmid b$, $e \equiv 1 \bmod 2$) und für den $(m/p)=-1$ gilt. Mit a wäre wegen $p \nmid b$ auch p^e Idealnorm aus $D(m)$; weil e ungerade und $\|(p)\|=p^2$ ist, müßte es daher ein Ideal der Norm p in $D(m)$ geben, was aber dem Zerlegungsgesetz widerspricht. Also ist a keine Idealnorm, somit a keine Norm einer Zahl aus $D(m)$.

Unser nächstes Ergebnis wird auch bei der Untersuchung von Zahlkörpern der Form $\mathbb{Q}(\sqrt[k]{m})$, $k=2^l$, eine große Rolle spielen:

(3.2) <u>Sei $q \equiv 3 \bmod 4$ prim und $q \geq 11$; dann gibt es $a, b \in \mathbb{N}$ mit $2q = a+b$, $a \equiv 5 \bmod 8$ und $(a/q)=+1$.</u>

Bew.: Wir unterscheiden

1. $q \equiv 3 \bmod 8$: für $q=11$ wählen wir $a=5$; also dürfen wir $q \geq 19$ annehmen. Es gibt dann ein $c \in \mathbb{N}$ mit $2q < 16c < 3q$, und wir haben $q < 16c-q < 2q$, sowie $0 < 8c-q < q/2$. Also sind $8c-q$ und $16c-q$ natürliche Zahlen aus dem Intervall $(0, 2q)$, und beide sind $\equiv -q \equiv 5 \bmod 8$. Wegen $(2/q)=-1$ haben beide Zahlen aber verschiedenen Restcharakter mod q (beachte $16c-q \equiv 2(8c-q) \bmod q$), d.h. genau eine der beiden Zahlen ist quadratischer Rest, und wir dürfen $a = 8c-q$ oder $a = 16c-q$ wählen.
2. $q \equiv 7 \bmod 8$: dann ist $q \geq 23$, und wir wählen ein $c \in \mathbb{N}$ mit $5q < 16q < 6q$. Wie oben liegen dann die beiden Zahlen $16c-5q$ und $-8+3q$ im Intervall $(0,2q)$, sind $\equiv 5 \bmod 8$ und haben entgegengesetzten quadratischen Restcharakter mod q. Wie in 1. folgt nun die Behauptung.

Jetzt folgt sofort

(3.3) Sei $m \equiv 2 \mod 4$, $m \in \mathbb{N}$ quadratfrei. Dann ist $D(m)$ genau für $m=2$ und $m=6$ normeuklidisch.

Bew.: Daß $D(2)$ und $D(6)$ normeuklidisch sind, wissen wir aus § 2. Weiter haben wir schon in § 1 gesehen, daß $D(14)$ nicht normeuklidisch ist. Sei also $m \geq 22$ und $D(m)$ normeuklidisch. Wegen $h(K)=1$ dürfen wir $m=2q$, $q \equiv 3 \mod 4$ prim annehmen. Jetzt verwenden wir (1.6) mit $f=2q$ und den Werten von a, b aus (3.2) und zeigen, daß weder a noch -b Normen aus $D(m)$ sind. Wegen $(2/a) = -1$ und $(2/b) = 1$ (man beachte dazu $a \equiv 5 \mod 8$, $b \equiv 2q-a \equiv 1 \mod 8$) erhalten wir

$(2q/a) = -(q/a) = -(a/q) = -1$, sowie

$(2q/b) = (q/b) = (b/q) = (2q-a/q) = (-a/q) = -1$.

Mit 3.1. folgt nun, daß weder a noch -b Normen aus $D(m)$ sind, und (1.6) liefert die Behauptung.

Genauso elementar läßt sich auch der Falle $m \equiv 3 \mod 4$ behandeln:

(3.4) Sei $q \equiv 3 \mod 4$ prim und $q \geq 23$; dann gibt es $a,b \in \mathbb{N}$ mit $q = a + b$, $(a/q)=+1$ und $a \equiv 5-q \mod 8$.

Bew.: Für die primen q mit $19 < q < 64$ geben wir die Paare (q,a) direkt an: (23,6), (31,14), (43,10), (47,6), (59, 26). Jetzt dürfen wir $q \geq 67$ annehmen; wieder unterscheiden wir:

1. $q \equiv 3 \mod 8$: wir wählen dann ein $c \in \mathbb{N}$ mit $2q-16 < 64c < 3q-8$. Damit liegen die beiden Zahlen $8c+2$ und $8(8c+2)-2q$ im Intervall $(0,q)$, beide sind $\equiv 2 = 5-q \mod 8$, und genau eine von ihnen ist quadratischer Rest mod q.
2. $q \equiv 7 \mod 8$: sei $c \in \mathbb{N}$ mit $q+16 < c < 2q+16$; wir sehen, daß sowohl $8c-2$, als auch $2q-8(8c-2)$ zwischen 0 und q liegen, $\equiv -2 \equiv 5-q \mod 8$ sind und entgegengesetzten quadratischen Restcharakter mod q haben.

(3.5) Sei $m \equiv 3 \mod 4$ quadratfrei; dann ist $D(m)$ genau für $m = 3, 7, 11, 19$ normeuklidisch.

Bew.: Für $m = 3, 7, 11, 19$ ist $M(K)<1$, folglich $D(m)$ normeuklidisch. Sei daher $m=q$, $q \equiv 3 \mod 4$ prim und $q \geq 23$; nach (3.4) gibt es $a,b \in \mathbb{N}$ mit $q=a+b$, $a \equiv 5-q \mod 8$ und $(a/q)= +1$. Mit diesen Werten für a und b verwenden wir nun (1.6) mit $f=q$ und müssen noch zeigen, daß a und -b keine Normen aus $D(m)$ sind. Da mit a auch $c = a/2 \equiv 1 \mod 2$ eine Norm aus $D(m)$ wäre, folgt dies aber sofort aus $(q/c) = (q/b) = -1$ und (3.1).

Zum Teil läßt sich auch der Fall $m \equiv 1 \bmod 4$ auf diese Art behandeln; so gilt z.B.

(3.6) <u>(Hofreiter 1934) Sei $m = 3q$, $q \equiv 7 \bmod 8$; dann ist $D(m)$ genau für $m=21$ normeuklidisch.</u>

Bew.: Wegen $M(K) = 5/7 < 1$ für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{21})$ dürfen wir $q \geq 23$ und $q \equiv 7 \bmod 8$ prim annehmen; dann verwenden wir (1.6) mit den folgenden Werten für a und b:

$f=q$	a	b
$q \equiv 7 \bmod 24$	18	$q-18$
$q \equiv -1 \bmod 24$, $q \equiv 5 \bmod 9$	2	$q-2$
$q \equiv -1 \bmod 24$, $q \equiv 2 \bmod 9$	8	$q-8$
$q \equiv -1 \bmod 24$, $q \equiv 8 \bmod 9$	32	$q-32$

Wegen $q \equiv 7 \bmod 8$ ist 2 und damit auch a quadratischer Rest mod q; andererseits wäre mit a auch 2 eine Norm aus $D(m)$: dies ist aber wegen $m \equiv 5 \bmod 8$ nicht der Fall. Weiter ist im Falle $q \equiv 7 \bmod 24$ wegen $b = q-18 \equiv 13 \bmod 24$: $(\frac{m}{b}) = (\frac{3}{b})(\frac{q}{b}) = (\frac{b}{3})(\frac{b}{q}) = (\frac{-18}{q}) = (\frac{-2}{q}) = -1$ und damit $-b$ keine Norm aus $D(m)$. Schließlich ist a im Falle $q \equiv -1 \bmod 24$ so gewählt, daß $b \equiv 3 \bmod 9$ ist; mit b wäre also auch $c = b/3$ Norm aus $D(m)$, aber $(\frac{m}{c}) = (\frac{c}{m}) = (\frac{c}{q}) = (\frac{3}{q})(\frac{3c}{q}) = (\frac{b}{q}) = -1$ zeigt, daß dies nicht der Fall ist.

(3.7) <u>Sei $m=3q$, $q \equiv 3 \bmod 8$; dann ist $D(m)$ genau für $m=33$ und $m=57$ normeuklidisch.</u>

Bew.: Der folgende Beweis, daß nur die Werte $m=33$ und $m=57$ in Frage kommen, geht auf Schuster (1938) zurück. Gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $0 < 3s < q$, $s \equiv 1 \bmod 6$ und $(s/q) = -1$, so ist $D(m)$ nicht normeuklidisch: setzt man nämlich $f=q$ und

$a = 3s$, $b = q-3s$ für $q \equiv 1 \bmod 3$, sowie
$a = q-3s$, $b = 3s$ für $q \equiv 2 \bmod 3$,

dann gilt $(a/q) = +1$; weiter ist z.B. im ersten Falle mit a auch $s = a/3$ Norm, aber $(\frac{m}{s}) = (\frac{s}{3})(\frac{s}{q}) = -1$ und auch $(\frac{m}{b}) = (\frac{b}{3})(\frac{b}{q}) = -1$.

Wir zeigen nun die Existenz eines solchen s für alle primen $q \geq 43$; für $q < 108$ geben wir die Paare (q,s) direkt an: $(43, 7)$, $(59, 13)$, $(67, 7)$, $(83, 13)$, $(107, 7)$. Für die andern q unterscheiden wir

i) $q \equiv 11 \bmod 24$: wir wählen $c \in \mathbb{N}$ mit $21q < 108c < 22q$; dann liegen die beiden Zahlen $6c-q$ und $36c-7q$ im Intervall $(0, q/3)$ und haben entgegengesetzten Restcharakter mod q.

ii) $q \equiv 19 \bmod 24$: sei $15q < 108c < 16q$; hier genügt eine der beiden Zahlen $q-6c$ und $36-5q$ unseren Anforderungen.

Damit bleiben im Falle von zusammengesetztem $m \equiv 1 \bmod 4$ nur noch solche zu untersuchen, für die $m=pq$, $p \equiv q \equiv 3 \bmod 4$ prim, $7 \le p < q$ (insbesondere $pq \ge 77$) zu untersuchen. Hofreiters Beweis (1935), daß D(77) nicht normeuklidisch ist, enthält jedoch einen Fehler, der bisher anscheinend unbemerkt blieb (sh. z.B. van der Linden (1984), p. 15 unten): er behauptet, die Gleichung $77x^2-Y^2 = -92$ sei in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar wegen $(77/23) = -1$; allerdings ist $(77/23) = +1$, und $x=2$, $Y=20$ eine Lösung dieser Gleichung.

Daß D(77) in der Tat nicht normeuklidisch ist, zeigen wir mit

(3.8) <u>Sei $m=pq$, $p \equiv q \equiv 3 \bmod 4$ prim; gibt es dann ein $r \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{r}{p}) = -(\frac{r}{q}) = (\frac{p-r}{q})$ und $r<p$, so ist D(m) nicht normeuklidisch.</u>

Bew.: Wir verwenden (1.6) mit $f=p$ und $a = r$, $b = p-r$, falls $(\frac{r}{p}) = +1$, sowie $a = p-r$, $b = r$, falls $(\frac{r}{p}) = -1$ ist. Damit haben wir $f = a+b$, $(\frac{a}{p}) = +1$, und weiter $(\frac{m}{a}) = (\frac{pq}{r}) = (\frac{r}{p})(\frac{r}{q}) = -1$, $(\frac{m}{b}) = (\frac{-b}{m}) = (\frac{p-r}{q})(\frac{-r}{p}) = -1$, d.h. a und $-b$ sind nach (3.1) keine Normen aus D(m).

Als Korollar hat man sofort

(3.9) <u>Ist $m=7q$, $q \equiv 11, 19 \bmod 24$, so ist D(m) nicht normeuklidisch.</u>

Bew.: Setze $p=7$, $r=2$ in (3.8).

Insbesondere ist also D(77) nicht normeuklidisch. Um nun die Klassifikation der normeuklidischen quadratischen Zahlkörper abzuschließen, verwenden wir das Ergebnis von Cassels (1952), nach dem quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ mit $m \in \mathbb{N}$ nur dann normeuklidisch sein können, wenn disc $K \le 2577$ gilt.

Wir lassen dann einen Computer für die 92 Werte von $m=pq$ mit $m=pq$, $p \equiv q \equiv 3 \bmod 4$ prim, $q \ge 7$, $p \ge q+4$, eine Lösung von (3.8) suchen und erhalten

(3.10) <u>Sei $m=pq$, $p \equiv q \equiv 3 \bmod 4$; dann ist D(m) genau für $m = 21, 33, 57$ normeuklidisch.</u>

Zu guter Letzt brauchen wir noch ein Kriterium für prime $m \equiv 1 \bmod 4$; ein solches haben in der folgenden Form Erdös und Ko (1938) bereitgestellt:

(3.11) <u>Sei $m = p \equiv 1 \bmod 4$ prim; gibt es dann $r,s,t,u \in \mathbb{N}$ mit $p = rs \pm tu$, $(r,s) = (t,u) = 1$, $(\frac{r}{p}) = (\frac{s}{p}) = (\frac{t}{p}) = -1$, so ist D(m) nicht normeuklidisch.</u>

Bew.: (1.6) mit $a=rs$, $b=tu$.

Wieder läßt man nun einen Computer suchen, und man findet, daß für alle primen $m \equiv 1 \bmod 4$ mit $m \geq 2577$ bis auf die folgenden eine solche Darstellung existiert: m = 5, 13, 17, 29, 37, 41, 61, 73, 89, 97, 109, 113, 137, 193, 241, 313, 337, 457, 601.

Im Hinblick auf spätere Anwendungen in § 5 wollen wir den Fall $m \equiv 5 \bmod 24$ ohne Benutzung der Schranke von Cassels behandeln:

(3.12) <u>Ist $m = p \equiv 5 \bmod 24$ prim, so existiert für alle $p \geq 29$ eine Darstellung $p = rs + tu$ wie in (3.11). Insbesondere ist D(m) für solche m genau dann normeuklidisch, wenn $m = 5$ oder $m = 29$ ist.</u>

Bew.: Wir suchen ein $s \in \mathbb{N}$ mit $0 < 3s < p$, $(s,3p) = 1$, $s \equiv 1 \bmod 4$ und $(\frac{s}{p}) = -1$. Haben wir ein solches s gefunden, so ist $p - 3s \equiv 2 \bmod 4$, d.h. es ist $p = 3s+2u$ für ein $u \in \mathbb{N}$, $u \equiv 1 \bmod 2$, und wir sind fertig.

Ist $p \equiv 2 \bmod 5$, so können wir $s = 5$ nehmen; für die andern $p < 432$ geben wir die Paare (p,s) direkt an: (101 , 29), (149 , 13), (269 , 29), (389 , 29).

Ist $p \geq 437$, so gibt es ein $c \in \mathbb{N}$ mit $2p-36 < 432c < 3p-36$. Eine der beiden Zahlen $12c+1$ und $p-144c-12$ erfüllt dann obige Bedingungen an s.

Offenbar beruht der Beweis von (3.12) auf der Kenntnis von zwei "kleinen" quadratischen Nichtresten mod p, nämlich $t=2$ und $r=3$ für $p \equiv 5 \bmod 24$. Im Falle $m \equiv 13 \bmod 24$ kennt man nur den Nichtrest $t=2$, sodaß ein Analogon zu (3.12) in diesem Fall viel schwieriger zu beweisen ist; Brauer hat 1940 die Existenz einer Darstellung (3.11) für prime $p \equiv 13 \bmod 24$, $p > 109$, auf kompliziertem, aber elementarem Weg bewiesen.

Da D(m) für m = 5, 13, 17, 29, 37, 41, 73 normeuklidisch ist, für m = 61, 89, 97, 109, 113, 137 aber nicht (sh. § 1, S. 31-33 und § 2, S. 54-55), bleiben noch die Werte m = 193, 241, 337, 457 und 601 zu untersuchen. Daß der EA in D(m) für diese m nicht gilt, zeigte zuerst Inkeri (1947), und zwar mit einer Methode, die Mit (1.8) verwandt ist und auf Redei zurückgeht. Unabhängig davon haben dann Chatland und Davenport (1950) dafür Beweise gegeben, und zwar kürzere als Inkeri; dabei benutzten sie Davenports Methode, mit der dieser die Schranke disc K $< 2^{14}$ für alle reellquadratischen normeuklidischen Zahlkörper bewiesen hatte. Die Rechnungen von Chatland und Davenport lassen sich mit einem Computer leicht nachkontrollieren (im Falle m=601 hat sich ein Fehler eingeschlichen; sh. dazu Ennola 1958a).

Damit sind alle normeuklidischen quadratischen Zahlkörper bestimmt. Es wäre allerdings wünschenswert, auch für die Werte m = 193, ..., 601 "einfache" Beweise zu haben (z.B. nicht- euklidische Ideale kleiner Norm in diesen Körpern). Daß sich zumindest einige dieser m mit (1.8) nicht ausschließen lassen, liegt an den recht großen Werten der jeweiligen Fundamentaleinheiten; so ist z.B. $u = 139\,468\,303\,679\,532 + 5\,689\,030\,769\,845\sqrt{601}$ die FE in D(601).

Wir wenden uns nun der Anwendung von (1.15) und (1.16) in reellquadratischen Zahlkörpern zu. Mit (1.15) lassen sich nur die normeuklidischen Ringe D(m) für m = 2, 3, 5, 13 finden, und zwar mit der trivialen 1-Folge 0,1 (für diese Ringe ist $M_{r,s} \leq \sqrt{13}/2 < 2$). Zu bemerken ist noch, daß in allen D(m) mit positivem m $\mu_1 = 2$ ist (d.h. 0, 1 ist maximale 1-Folge) außer für D(5), wo $\mu_1 = 4$ ist.

Beim Auffinden von 2-euklidischen Zahlringen ist (1.16) etwas erfolgreicher als im 1-euklidischen Fall. Ein Beispiel für eine verhältnismäßig lange 2-Folge ist 0, 1, 2, 3, 4, $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $3+\sqrt{2}$, $4+\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $1+2\sqrt{2}$, $2+2\sqrt{2}$, $3+2\sqrt{2}$, $4+2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $1+3\sqrt{2}$, $2+3\sqrt{2}$, $3+3\sqrt{2}$, $4+3\sqrt{2}$, $5+4\sqrt{2}$, $6+4\sqrt{2}$, $7+4\sqrt{2}$ in D(2); diese 2-Folge zeigt $\mu_2 \geq 23$, während wegen (1.17) $\lambda_2 \leq 25$ ist (denn das Ideal (5) besitzt kein PERS).

In der folgenden Tabelle sind 2-Folgen angegeben, die nachweisen, daß die Ringe D(m) für m = 14, 23, 31, 43, 53, 61, 69, 77, 89, 93, 97, 113, 129, 133, 137, 157, 161, 173, 193, 201, 213 2-euklidisch sind.

m	$\vartheta_1, \dots, \vartheta_k$ $(\beta = (1+\sqrt{m})/2)$
14	0, 1, $4+\sqrt{14}$, $5+\sqrt{14}$
23	0, 1, 2, $3+\sqrt{23}$, $4+\sqrt{23}$, $5+\sqrt{23}$, $7+2\sqrt{23}$, $8+2\sqrt{23}$
31	0, 1, 2, $5+\sqrt{31}$, $6+\sqrt{31}$, $7+\sqrt{31}$, $11+2\sqrt{31}$
43	0, 1, 2, $8+\sqrt{43}$, $14+2\sqrt{43}$, $15+2\sqrt{43}$, $16+2\sqrt{43}$
53	0, 1, 2, 3, 4
61	0, 1, 2, 3, 4, $4+\beta$, $6+\beta$, $10+\beta$
69	0, 1, 2, $2+\beta$, $3+\beta$, $4+2\beta$, $5+2\beta$, $6+2\beta$
77	0, 1, 2, β, $1+\beta$, $2+\beta$
89	0, 1, 2, 3, 4
93	0, 1, 2, $3+\beta$, $4+\beta$, $5+2\beta$, $6+2\beta$
97	0, 1, 2, 3, $7+\beta$, $11+2\beta$, $12+2\beta$, $13+2\beta$, $14+2\beta$
109	0, 1, 3, $4+\beta$, $6+\beta$, $10+2\beta$
113	0, 1, 2, 3, 4, $13+2\beta$
129	0, 1, 2, $11+2\beta$, $12+2\beta$, $13+2\beta$, $16+3\beta$
133	0, 1, 2, $6+\beta$, $7+\beta$, $8+\beta$
137	0, 1, 2, 3, 4, $16+3\beta$, $17+3\beta$
149	0, 1, $6+\beta$, $12+2\beta$, $17+3\beta$, $23+4\beta$
157	0, 2, 3, $5+\beta$, $8+\beta$, $13+2\beta$, $18+3\beta$
161	0, 1, $5+\beta$, $6+\beta$, $10+2\beta$, $11+2\beta$, $12+2\beta$
173	0, 2, 3, $6+\beta$, $12+\beta$, $18+2\beta$
193	0, 2, 4, $5+\beta$, $7+\beta$, $9+\beta$, $27+4\beta$
201	0, 1, 2, 3, $6+\beta$, $7+\beta$, $8+\beta$, $13+2\beta$, $14+2\beta$
213	0, 1, 2, 3, $5+\beta$, $6+\beta$, $7+\beta$, $8+\beta$, $10+2\beta$, $11+2\beta$, $12+2\beta$, $13+2\beta$, $17+3\beta$, $18+3\beta$, $19+3\beta$, $20+3\beta$

Manche hier aufgeführten 2-Folgen sind länger, als man zum Nachweis, daß D(m) 2-euklidisch ist, benötigt, andere lassen sich noch verlängern. Alle diese Folgen wurden von Hand errechnet; möglicherweise lassen sich auch noch andere quadratische Körper mit (1.16) als 2-euklidisch nachweisen.

Anmerkungen zu § 3

Um die Klassifikation aller normeuklidischen quadratischen Zahlkörper hat sich eine große Anzahl von Mathematikern verdient gemacht (zwecks Pluralbildung sh. Mentz 1988); die nachfolgende Tabelle soll einen Überblick geben:

1832: Gauß zeigt bei seiner Untersuchung der biquadratischen Reste, daß D(-1) normeuklidisch ist. In seinem Nachlaß findet sich ein ähnlicher Beweis für D(-3).

1847: Wantzel veröffentlicht den ersten Beweis für D(-3).

1886: Legendre gibt die kleinste Lösung von $x^2 - Ny^2 = \pm 1$, $N \leq 1003$.

1893: Dedekind gibt einen Beweis für D(-1) mit dem Hinweis, daß sich die Fälle D(m), m = -11, -7, -3, -2, 2, 3, 5, 13 ähnlich behandeln lassen.

1907: Sommer gibt FE und Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $-97 \leq m \leq 101$.

1927: Dickson zeigt, daß die Ringe D(m), m = -11, -7, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 13 normeuklidisch sind und behauptet, daß es keine anderen normeuklidischen quadratischen Ringe gibt.

1928: Schaffstein berechnet die Klassenzahl reellquadratischer Zahlkörper mit Primzahldiskriminante ≤ 12000.

1933: Perron weist den EA in den Ringen D(m), m = 6, 7, 11, 17, 21, 29 nach und deckt damit den Irrtum Dicksons auf. Dabei deutet er an, daß möglicherweise jeder quadratische Zahlkörper mit Klassenzahl 1 normeuklidisch ist. I. Schur teilt Perron daraufhin mit, daß D(47) nicht normeuklidisch ist; dies scheint das erste Ergebnis in dieser Richtung zu sein.

1934: In einem Brief an Perron zeigt Oppenheim, daß der EA außer in den bereits bekannten Fällen auch in D(33), D(37) und D(41) gilt, während D(23), D(31) und D(53) nicht norm- euklidisch sind. Unabhängig von Oppenheim weist Remak den EA in D(33), D(37) und D(41) nach.

1935: Fox und Berg zeigen unabhängig voneinander, daß D(m) im Falle $m \equiv 2, 3 \bmod 4$ höchstens für m = 2, 3, 6, 7, 11, 19 normeuklidisch sein kann; Berg zeigt darüberhinaus, daß D(19) tatsächlich normeuklidisch ist. Hofreiter beweist, daß D(57) normeuklidisch ist und findet alle normeuklidischen D(m) mit $m \equiv 21 \bmod 24$.

1936: Behrbohm und Redei finden alle normeuklidischen D(m) mit $m \equiv 5 \bmod 24$.

1938: Schuster findet alle normeuklidischen D(m) mit $m \equiv 9 \bmod 24$; Erdös und Ko zeigen, daß es nur endlich viele prime p mit $p \equiv 1 \bmod 8$ gibt, sodaß D(p) normeuklidisch ist. Heilbronn zeigt dies auch für zusammengesetzte $m \equiv 1 \bmod 8$.

1940: Brauer zeigt, daß der EA in D(m), $m \equiv 13 \bmod 24$, nur bestehen kann, wenn $m \leq 109$ gilt.

1942: Redei zeigt, daß D(73) normeuklidisch ist, findet alle normeuklidischen D(m) mit $m \equiv 17 \bmod 24$ und schließt den EA in D(m), m = 61, 89, 109, 113, 137 aus. Damit bleibt nur noch die Restklasse $m \equiv 1 \bmod 24$ unerledigt.

1944: Hua zeigt, daß für normeuklidische Körper $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$, $p \equiv 1 \bmod 4$ prim, die Ungleichung disc $k < e^{250}$ besteht. Zusammen mit Min zeigt er, daß jedes prime $p \equiv 17 \bmod 24$ mit $p > 137$ eine Darstellung $p = rs + tu$ besitzt, wobei $(r,s) = (t,u) = 1$ und $(r/p) = (s/p) = (t/p) = -1$ gilt.

1947: Inkeri zeigt, daß es keine normeuklidischen $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ mit disc $K < 5000$ außer den bereits bekannten gibt.

1948: Davenport zeigt, daß disc $K \leq 16384 = 2^{14}$ für reellquadratische, normeuklidische Körper gilt.

1949: Chatland findet für jedes prime $p \equiv 1 \bmod 4$, $601 < p \leq 16384$, eine Darstellung (3.11). Zusammen mit dem Ergebnis von Inkeri (1947) heißt das, daß alle normeuklidischen quadratischen Zahlkörper bekannt sind.

1950: Chatland und Davenport behandeln die Körper mit $193 \leq$ disc $K \leq 601$ (anders als Inkeri und offenbar in Unkenntnis seiner Arbeit).

1952: Barnes und Swinnerton-Dyer zeigen, daß D(97) - entgegen einer Behauptung von Redei aus dem Jahre 1942 - nicht normeuklidisch ist. Varnavides gibt einen einheitlichen Beweis dafür, daß die Körper $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ mit m = 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73 normeuklidisch sind.

1958: Ennola zeigt noch einmal, daß $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ genau für die oben angegebenen Werte normeuklidisch ist.

1977: Cooke findet 20 2-stufig normeuklidische quadratische Zahlkörper.

1985: Johnson, Queen und Sevilla zeigen, daß D(10) und D(65) semi-euklidisch sind.