§ 2 Die Bestimmung euklidischer Minima

Am Beginn des § 1 haben wir gesehen, wie man untere Schranken für das euklidische Minimum $M(K)$ findet; hier nun wollen wir Methoden vorstellen, die es gestatten, $M(K)$ nach oben abzuschätzen. Wenn beide Schranken übereinstimmen, hat man $M(K)$ bestimmt.

Sei dazu $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis eines algebraischen Zahlkörpers K (i.A. werden wir hier eine GHB wählen; jedoch empfiehlt es sich manchmal, aus Symmetriegründen etwa $\{1, \sqrt{m}\}$ für quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ auch im Falle $m \equiv 1 \bmod 4$ zu nehmen - die Gründe hierfür werden noch klar werden). Dann definieren wir durch $\varphi : K \mapsto \mathbb{R}^n =: \underline{K} : (r_1\alpha_1 + \ldots + r_n\alpha_n) = (r_n, \ldots, r_n)$ eine Einbettung von K in $\underline{K} = \mathbb{R}^n$. Wie schon in § 1 werden wir R und $\varphi(R)$ i.A. identifizieren. Durch

$$| \ |_i : \underline{K} \mapsto \mathbb{R} : x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left|\sum_{j=1}^{n} x_j \tau_i(\alpha_j)\right|^{\delta},$$

wo $\delta = 1$ für reelle und $\delta = 2$ für nichtreelle Einbettungen von K in $\mathbb{C}$ ist, haben wir die Bewertungen von K auf $\underline{K}$ "fortgesetzt" in dem Sinne, daß für alle $x \in K$ $|x|_i = |\varphi(x)|_i$ gilt; man beachte jedoch, daß $| \ |_i$ auf $\underline{K}$ natürlich keine Bewertungen mehr sind, schon allein deshalb nicht, weil $\underline{K}$ kein Körper ist (wir fassen $\underline{K}$ nur als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf). Weiter folgt aus $|x|_i = 0$ i.A. nicht, daß $x = 0$ ist! Durch $N(x) = |x|_1 \cdot \ldots \cdot |x|_{r+s}$ können wir auch die Norm $|N_{K/\mathbb{Q}}|$ von K nach $\underline{K}$ fortsetzen und haben $|N_{K/\mathbb{Q}}(x)| = N(\varphi(x))$ für alle $x \in K$. Auch hier müssen wir bemerken, daß N auf $\underline{K}$ keine Norm im topologischen Sinne ist, weil aus $N(x) = 0$ nicht $x = 0$ folgt.

Beispiel: sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$; wir wählen die $\mathbb{Q}$-Basis $\{1, \sqrt{7}\}$ und haben für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ $\varphi(a + b\sqrt{7}) = (a, b)$. Also ist $\varphi(K) = \mathbb{Q}^2$, während $\underline{K} = \mathbb{R}^2$ ist. Weiter haben wir für ein $x = (a, b) \in \underline{K}$ $|x|_1 = |a + b\sqrt{7}|$, $|x|_2 = |a - b\sqrt{7}|$ und $N(x) = |a^2 - 7b^2|$. Insbesondere ist $|x|_2 = 0$ und damit auch $N(x) = 0$ für $x = (\sqrt{7}, 1) \in \underline{K} \setminus \{0\}$. Man beachte, daß durch $\{x \in \underline{K} : |x|_1 = 0\}$ eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

Indem wir $\underline{K}$ mit der gewöhnlichen euklidischen Metrik versehen, werden $| \ |_1, \ldots, | \ |_{r+s}$ und N zu stetigen Funktionen auf $\underline{K}$, und für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ist $U_\varepsilon = \{x \in \underline{K} : |x|_i < \varepsilon \text{ für } 1 \le i \le r+s\}$ eine beschränkte Umgebung von x (die Beschränktheit sieht man bei Verwendung von (1.10) leicht ein). Ist $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine GHB von K, so heißt $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \underline{K} : -1/2 \le x_i < 1/2 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$ ein Fundamentalbereich von K. Mit $\underline{F}$ bezeichnen wir den kompakten Abschluß $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \underline{K} : -1/2 \le x_i \le 1/2 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$ von F.

Um nun zu zeigen, daß für alle $x \in K$ ein $y \in R$ existiert mit $|N_{K/\mathbb{Q}}(x-y)| < k$, genügt es, zu jedem $x \in \underline{K}$ ein $y \in R$ zu finden mit $N(x-y) < k$. Damit wird folgende Definition gerechtfertigt: $M(\underline{K}) := \inf\{\kappa \in R : \forall\, x \in \underline{K}\ \exists y \in R : N(x-y) < \kappa\}$; entsprechend definieren wir auch die weiteren Minima $M_2(\underline{K})$, $M_3(\underline{K})$ usw., soweit sie existieren. Wegen $K \subset \underline{K}$ ist die Ungleichung $M(K) \leqq M(\underline{K})$ sofort klar. Ob aus der Isolation von $M(K)$ auch diejenige von $M(\underline{K})$ folgt, weiß man nicht; mit $M(\underline{K})$ ist aber sicher auch $M(K)$ isoliert, und wir haben $M_2(K) \leqq M_2(\underline{K})$. Entsprechendes gilt für die höheren Minima.

Setzt man $M(F) = \inf \{k \in R : \forall\ x \in F\ \exists y \in R$ mit $N(x-y) < k\}$, so ist offenbar $M(F) = M(\underline{F}) = M(\underline{K})$. Da N als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\underline{F}$ beschränkt ist, ist $M(\underline{F}) \leqq \max \{N(x) : x \in \underline{F}\}$, und insbesondere ist $M(\underline{K})$ (und damit auch $M(K)$) endlich.

Die Methode zur Bestimmung von $M(\underline{K})$, die wir nun vorstellen wollen, geht auf Barnes und Swinnerton-Dyer zurück und verläuft immer folgendermaßen: man zeigt $M(K) \geqq k$ für ein $k \in R$ mit den Kriterien aus § 1, sowie $M(\underline{K}) \leqq k$ für dasselbe k; damit ist $M(K) \leq M(\underline{K}) \leq k$, also $M(K) = M(\underline{K}) = k$. Diese Bemerkung zeigt bereits, daß diese Methode nur dann erfolgreich sein kann, wenn $M(K) = M(\underline{K})$ gilt; man vermutet allerdings, daß dies in Zahlkörpern immer der Fall ist. Wir wollen diese Methode nun am Beispiel $K = \mathbb{Q}(\sqrt{14})$ beschreiben. Dazu wählen wir die GHB $\{1, \sqrt{14}\}$ und setzen $(a,b) \times (c,d) = \{r + s\sqrt{14} : a \leq r \leq b,\ c \leq s \leq d\}$; damit ist z.B. $F = (-0.5\ , 0.5) \times (-0.5, 0.5)$. Um zu zeigen, daß $M(K) \geqq \frac{5}{4}$ ist, wählen wir ein $k \in \mathbb{R}$, das etwas kleiner als $\frac{5}{4}$ ist, z.B. $k = 1.2$ (der genaue Wert von k spielt hier keine Rolle; um $M(\underline{K})$ zu bestimmen, sollte er nur zwischen $M_2(\underline{K})$ und $M(\underline{K})$ liegen). Wir nennen dann eine Menge $(a,b) \times (c,d) \subset K$ bedeckt, wenn es für alle $x \in (a,b) \times (c,d)$ ein $y \in R$ gibt mit $N(x-y) < k$ (ob eine solche Menge bedeckt ist, hängt also von k ab!). Ein $x \in K$ mit $N(x-y) \geq k$ für alle $y \in R$ nennen wir einen ***Ausnahmepunkt***.

Die Programme, die wir in § 11 genauer beschreiben werden, erlauben es uns, ganz F bis auf die folgenden Gebiete zu bedecken:

$S_1 = (0.499,\ 0.5) \times (0.499975,\ 0.5)$,
$S_2 = (0.499,\ 0.5) \times (-0.5\ ,\ -0.499975)$,
$S_3 = (-0.5, -0.499) \times (0.499975\ ,\ 0.5)$,
$S_4 = (-0.5, -0.499) \times (-0.5\ ,\ -0.499975)$.

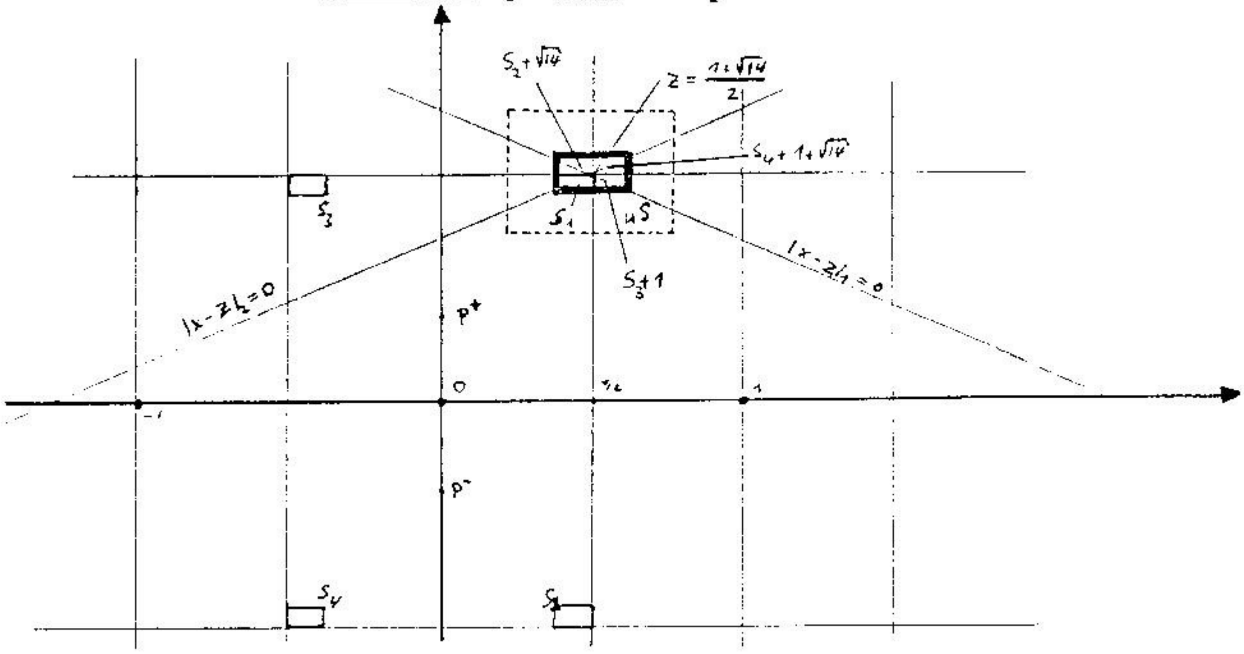
Man sieht jetzt, daß es etwas ökonomischer ist, statt $\underline{F}$ die Menge $\underline{F}' = (0,1) \times (0,1)$ zu betrachten, weil dann nur $S = (0.499\ , 0.501) \times (0.499975\ , 0.500025)$ unbedeckt bleibt und man es nur mit einer Menge statt mit vier zu tun hat. Sei nun $x \in F'$ ein Ausnahmepunkt (falls es einen solchen gibt; in der Tat wissen wir aus § 1, daß $M(x) = \frac{5}{4}$ für $x = (1 + \sqrt{14})$ gilt); dann ist sicher $x \in S$. Mit x ist aber auch xu ein Ausnahmepunkt, wo $u = 15 + 4\sqrt{14}$ die FE von K ist, d.h. es gibt ein $a \in R$ mit $xu - a \in S$. Diese Überlegung führt uns dazu, die Menge $uS = \{ux : x \in S\}$ zu betrachten; eine einfache Rechnung zeigt

$uS = (35.4836\ , 35.5164) \times (9.495625\ , 9.504375)$, also
$uS - (35 + 9\sqrt{14}) = (0.4836,\ 0.5164) \times (0.495625\ , 0.504375)$.

Mit $a = 35 + 9\sqrt{14}$ gilt daher: für jedes $x \in S$ liegt $ux - a$ entweder in bedecktem Gebiet oder wieder in S (hätten wir weniger genau gerechnet und z.B. $\underline{F}'$ nur bis auf die Menge $S' = (0.47,\ 0.53) \times (0.47,\ 0.53)$ bedecken können, so wäre $uS' = (33.37,\ 37.63) \times (8.93,\ 10.07)$ gewesen und es gäbe kein $a \in R$ mit obiger Eigenschaft, weil z.B. $uS - (35 + 9\sqrt{14}) = (-1.63,\ 1.63) \times (-0.07,\ 1.07)$ neben Punkten aus S' auch solche aus $S'-1$ oder $S'+1$ enthält).

Wenn wir aber eine Situation wie oben vorliegen haben, können wir die Lage etwaiger Ausnahmepunkte recht genau beschreiben; es gilt nämlich

(2.1) Sei K Zahlkörper, u eine Einheit in R, S eine Teilmenge von F und $a \in R$ ein Punkt mit der Eigenschaft, daß für alle $x \in S$ $ux-a$ in bedecktem Gebiet oder wieder in S liegt. Dann gilt für jeden Ausnahmepunkt x_o und für jede Bewertung $|\ |_j$ mit $1<|u|_j$: $|x_o - z|_j = 0$; hierbei ist $z = a/(u-1)$ der Fixpunkt der Abbildung $x \rightarrow ux-a$. Gilt darüberhinaus $|u|_j \neq 1$ für alle Bewertungen $|\ |_j$ von K, so wird durch $x_{i+1} = ux_i - a$ eine Folge x_o , x_1, x_2, ... von Ausnahmepunkten definiert mit $x_i \in S$ und $\lim x_i = z$.



In unserem Beispiel $K=\mathbb{Q}(\sqrt{14})$ ist $u = 15 + 4\sqrt{14}$, $a = 35 + 9\sqrt{14}$ und damit $z = a/(u-1) = (35 + 9\sqrt{14})/(14+ 4\sqrt{14}) = (1+\sqrt{14})$; die Menge aller $x \in K$ mit $|x-z|_1=0$ ist hier eine Gerade durch den Punkt z. Als einziger Ausnahmepunkt (für $k=1.2$) wird sich hier $x_o = z$ herausstellen; damit ist $x_1 = ux_o - a = x_o = z$, sodaß die Folge x_o, x_1, x_2, ... trivialerweise gegen z konvergiert.

Im Falle reellquadratischer Körper stammt (2.1) von Barnes und Swinnerton-Dyer (1952; Theorem C); der Beweis, den sie für ihr Theorem C geben, geht auf Cassels (unveröffentlicht; sh. dazu Bambah 1951) zurück, und ist viel undurchsichtiger als der folgende:

Bew. von 2.1.: Sei $|\ |_j$ eine Bewertung von K mit $1<|u|_j$ und $x_o \in F$ ein Ausnahmepunkt. Dann muß auch $x_1 = ux_o - a$ wieder ein Ausnahmepunkt sein (sonst läge mit x_1 auch $x_o = (x_1 + a)u^{-1}$ in bedecktem Gebiet), und nach Voraussetzung ist dann $x_1 \in S$. Durch die Rekursion $x_{i+1} = ux_i - a$ erhalten wir also eine Folge x_o, x_1, x_2, ... von in S liegenden Ausnahmepunkten. Nun ist aber $x_{i+1} - z = u(x_i - z)$ für alle $i \in \mathbb{N}_o$; da alle x_i in S liegen, muß $|x_{i+1} - z|_j$ beschränkt sein für alle Bewertungen $|\ |_j$ von K. Im Falle $|u|_j > 1$ geht dies aber nur, wenn $|x_i - z|_j = 0$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_o$.
Ist dagegen $|u|_j < 1$, so ist $|x_i - z|_j$ eine Nullfolge; falls also $|u|_j \neq 1$ für alle Bewertungen $|\ |_j$ von K ist, gilt $\lim |x_i - z|_j = 0$ für alle j mit $1 \leq j \leq r+s$; dies ist aber nur möglich, wenn $\lim x_i = z$ gilt.

In $K=\mathbf{Q}(\sqrt{14})$ liegt also jeder Ausnahmepunkt von S auf der Geraden $|x-z|_1 = 0$ für diejenige Bewertung $|\ |_1$, für welche $|15+4\sqrt{14}|_1 > 1$ ist. Um weiterzukommen, betrachten wir statt u die Einheit $u' = u-1 = 15 - 4\sqrt{14}$ und finden wie oben $u'S = -25+5\sqrt{14} + (0.4836,\ 0.5164)\times(0.495625,\ 0.504375)$. Wendet man hierauf (2.1) an, so folgt wegen $1<|u'|_2$, daß jeder Ausnahmepunkt von S auf der Geraden $|x-z|_2=0$ durch den Punkt $z = (-21+5\sqrt{14})/(14-4\sqrt{14}) = (1+\sqrt{14})/2$ liegt. Da sich die beiden Geraden $|x-z|_1=0$ und $|x-z|_2=0$ genau im Punkt z schneiden, ist $z = (1+\sqrt{14})/2$ der einzige Ausnahmepunkt von S. Bereits in § 1 haben wir gesehen, daß $M(z)=5/4$ ist; wir haben also

(2.2) <u>Sei $K=\mathbf{Q}(\sqrt{14})$; dann gilt</u> $M(K) = M(\underline{K}) = 5/4$; <u>dieses euklidische Minimum wird auf $F' = (0,1)\times(0,1)$ genau im Punkt $z = (1+\sqrt{14})/2$ angenommen; für alle $x \in F'\setminus\{z\}$ ist $M(K,x) \le 1.2$, d.h. das erste euklidische Minimum ist isoliert.</u>

In vielen Fällen wird man - wie oben für $\mathbf{Q}(\sqrt{14})$ - sowohl u als auch u^{-1} zur Bestimmung von M(K) verwenden können; in diesem Fall nimmt (2.1) die folgende Form an:

(2.3) <u>Mit den Bezeichnungen von (2.1) möge gelten:</u>
1. <u>es gibt ein $a \in R$, sodaß $ux-a$ für alle $x \in S$ in bedecktem Gebiet oder wieder in S liegt;</u>
2. <u>für alle $x \in S$ gibt es ein $b \in R$, sodaß $u^{-1}x-b$ in bedecktem Gebiet oder wieder in S liegt;</u>
3. <u>es ist $|u|_j = 1$ für jede Bewertung $|\ |_j$ von K;</u>

<u>dann ist $z = \frac{a}{u-1}$ der einzig mögliche Ausnahmepunkt von S.</u>

Bem.: Für reellquadratische K stammt dies von Cassels und ist erstmals von Bambah (1951) veröffentlicht worden; für den Originalbeweis gilt dieselbe Bemerkung wie für denjenigen von 2.1. Wie man leicht einsieht, läßt sich in Körpern mit Einheitenrang 1 die Bedingung 3. durch die Forderung "u ist keine Einheitswurzel" ersetzen.

Bew.: Sei $x \in S$ ein Ausnahmepunkt; für diejenigen Bewertungen mit $|u|_j > 1$ ist $|x-z|_j = 0$ wegen (2.4) und der Bedingung 1. Für alle andern Bewertungen ist $|u|_j < 1$ wegen 3., sodaß dann $1 < |u^{-1}|_j$ gilt. Wir stellen nun fest, daß mit x auch $x'=u^{-1}x-b \in S$ ein Ausnahmepunkt sein muß; wegen $x' \in S$ und 1. ist $ux'-a \in S$, also $x-ub-a \in S$. Da S eine Teilmenge von $\underline{F}$ und $a, ub \in R$ sind, muß $a=-ub$ sein: also ist $b=-au^{-1}$ unabhängig von x. Das Argument von (2.4) zeigt nun, daß x den Gleichungen $|x-z'|_j=0$ genügt, wobei

$$z' = \frac{b}{u^{-1}-1} = \frac{bu}{1-u} = \frac{a}{u-1} = z$$

gilt. Daher ist $|x-z|_j = 0$ für alle j mit $1 \le j \le r+s$, und folglich ist $x=z$ der einzig mögliche Ausnahmepunkt.

Mit etwas mehr Mühe können wir auch noch das zweite euklidische Minimum von $\mathbb{Q}(\sqrt{14})$ bestimmen (Bedocchi zeigte 1985, daß $M_2(K)\leq 1$ gilt; van der Linden behauptet auf S. 25 (1985), daß $M_2(K)<1$ ist, gibt dafür aber keinen Beweis). Wir wählen dazu $k=0.96$ und können ganz $F_1 = (-0.1,0.9)\times(-0.1,0.9)$ bedecken bis auf die folgenden Gebiete:

$S^+ = (-0.0005,\ 0.0005)\times(0.37475,\ 0.37525)$,

$S^- = (-0.0005,\ 0.0005)\times(-0.37525,\ -0.37475)$,

$S\ = (0.499,\ 0.501)\times(0.499975,\ 0.500025)$;

mit $a = 35+9\sqrt{14}$ und $b = -21+5\sqrt{14}$ liegen $uS-a$ und $u^{-1}S-b$ in bedecktem Gebiet oder wieder in S (insbesondere haben beide Mengen mit S^+ und S^- keinen Punkt gemeinsam); nach (2.3) ist daher $z = (1+\sqrt{14})/2$ der einzige Ausnahmepunkt von S. Nun finden wir

$uS^+ = 21+6\sqrt{14} + (-0.0215,0.0215)\times(-0.38075,-0.36925)$ und

$uS^- = -21-6\sqrt{14} + (-0.0215,0.0215)\times(0.36925,\ 0.38075)$.

Wir sehen also: für $a=21+6\sqrt{14}$ und $x\in S^+$ liegt $ux-a$ entweder in bedecktem Gebiet oder in S^-, während für $x\in S^-$ die Punkte $ux-a$ in bedecktem Gebiet oder in S^+ liegen. Dies führt uns auf folgende Verallgemeinerung von (2.1):

(2.4) <u>Sei K Zahlkörper, u Einheit,</u> $S_1, \ldots, S_t$ <u>Teilmengen von F und</u> $a_1,\ldots,a_t\in R$ <u>Punkte mit der Eigenschaft: für alle</u> $x\in S_i$ <u>liegt</u> ux_i-a_i <u>in bedecktem Gebiet oder in</u> S_{i+1} <u>(hierbei setzen wir</u> $S_{t+1}=S_1$. <u>Ist dann</u> $x_1\in S_1$ <u>ein Ausnahmepunkt, so gilt</u> $|x_1-z|_j = 0$ <u>für jede Bewertung von K mit</u> $|u|_j > 1$, <u>wobei</u> $z = a/(u^t-1)$ <u>mit</u> $a = u^{t-1}a_1+u^{t-2}a_2+\ldots+ua_{t-1}+a_t$ <u>Fixpunkt der Abbildung</u> $x \longmapsto u^t-a$ <u>ist.</u>

Bew.: Sei $x_1\in S_1$ ein Ausnahmepunkt; dann ist auch $x_2=ux_1-a_1\in S_2$ ein solcher, und wir finden nacheinander $x_3=ux_2-a_2\in S_3, \ldots, x_{t+1}=ux_t-a_t\in S_{t+1} = S_1$. Indem wir von hier aus zurückrechnen, erhalten wir $x_{t+1}=u^t x_1 -a$ für $a = u^{t-1}a_1+u^{t-2}a_2+\ldots+a_t$; damit haben wir ein $a\in R$ gefunden mit der Eigenschaft, daß für jeden Ausnahmepunkt $x_1\in S_1$ auch $u'x_1-a\in S_1$ ist für $u'=ut$. Mit (2.1) folgt jetzt, daß jeder Ausnahmepunkt $x\in S_1$ die Gleichung $|x-z|_j=0$ erfüllt, wobei $z=a/(u'-1)$ Fixpunkt der Abbildung $x \mapsto u'x-a$ und $|\ |_j$ eine Bewertung mit $1 < |u'|_j$ ist. Die Behauptung folgt.

Auch dieses Ergebnis stammt im reellquadratischen Fall von Barnes und Swinnerton-Dyer, eine entsprechende Verallgemeinerung von (2.3) von Cassels. In $\mathbb{Q}(\sqrt{14})$ ist $a_1=21+6\sqrt{14}$, $a_2=-a_1$, also $a=ua_1-a_1=a_1(u-1)$ und damit $z = a/(u_2-1) = a_1/(u+1) = 3\sqrt{14}/8 = (0\ ,\ 3/8)$ (wir wollen in Zukunft statt $a+b\sqrt{m}$ einfach (a,b) schreiben). Durch Verwenden von u^{-1} erhält man nun leicht, daß dieses z der einzig mögliche Ausnahmepunkt von S_1 ist; damit ist $z' = uz-a_1 = -z$ der einzig mögliche Ausnahmepunkt von S_2. Jetzt benutzen wir (1.8) mit $t=2$, $x_1=z$, $x_2=z'$ und finden $M(K,z) = M(K,z') = 31/32 = 0.96875$; damit haben wir folgende Verschärfung von (2.2):

(2.2') *Sei $K=\mathbf{Q}(\sqrt{14})$; dann ist $M(K) = M(\underline{K}) = 5/4$ das erste euklidische Minimum von K; dieses ist isoliert und wird mod R genau im Punkt $(1/2\,,1/2)$ angenommen. Weiter ist $M_2(K) = M_2(\underline{K}) = 31/32$ das zweite euklidische Minimum von K; auch dieses ist isoliert und wird mod R genau in den Punkten $(0, \pm\, \frac{3}{8})$ angenommen.*

Nicht immer kann man die euklidischen Minima so einfach bestimmen wie in $\mathbf{Q}(\sqrt{14})$; ein etwas komplizierteres Beispiel ist $K = \mathbf{Q}(\sqrt{13})$. Hier wählen wir die $\mathbf{Q}$-Basis $\{1\,,\sqrt{13}\}$ und den "Fundamentalbereich" $F = (0, \frac{1}{2})\times(0, \frac{1}{4})$ (Wir dürfen uns hierauf beschränken, weil es zu jedem $x\in\underline{K}$ ein $y\in R$ gibt mit $x-y \in F\cup -F\cup F^{\sigma} \cup -F^{\sigma}$; hier steht σ für den nichttrivialen Automorphismus $\sigma: \sqrt{13} \mapsto -\sqrt{13}$). Mit $k=0.333$ können wir ganz F bis auf die folgenden Gebiete

$$
\begin{aligned}
S_1 &= (-0.001, 0.001)\times(0.2128\ , 0.2129)\\
S_2 &= (0.116\ , 0.117)\times(0.1806\ , 0.1808)\\
S_3 &= (0.151\ , 0.152)\times(0.1707\ , 0.1711)\\
S_4 &= (0.161\ , 0.163)\times(0.1678\ , 0.1682)\\
S_5 &= (0.165\ , 0.166)\times(0.1668\ , 0.1672)\\
S_6 &= (0.166\ , 0.167)\times(0.1665\ , 0.1669),
\end{aligned}
$$

sowie die daraus durch Multiplikation mit -1 und Anwenden des Automorphismus σ entstehenden Gebiete bedecken. Mit $u = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ finden wir nun $-uS_1 = -\frac{3+\sqrt{13}}{2} + (0.11465, 0.1168)\times(0.18015\,, 0.1808)$, d.h. $-uS_1 + u$ liegt in bedecktem Gebiet oder in S_2 ; weiter liegt $-uS_2 + u$ in bedecktem Gebiet oder in S_3 , $-uS_3 + u$ in bedecktem Gebiet oder in S_4 usw., und $-uS_6 + u$ in bedecktem Gebiet oder in S_6 . Mit $S = S_1\cup S_2\cup \ldots \cup S_6$ gilt also: $-uS+u$ liegt in bedecktem Gebiet oder wieder in S. Nach (2.1) liegt jeder Ausnahmepunkt x von S auf der Geraden $|x-z|_1 = 0$ durch den Punkt $z = \frac{u}{u+1} = (\frac{1}{6}\,,\frac{1}{6})$.

Jetzt benutzen wir $u' = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ und setzen $T_1 = S_1$, sowie

$$
\begin{aligned}
T_2 &= (-0.117\,, -0.116)\times(0.1806\ , 0.1808)\\
&\ \ \ldots\\
T_6 &= (-0.167, -0.166)\times(0.1665, 0.1669)
\end{aligned}
$$

und $T = T_1\cup T_2\cup \ldots \cup T_6$. Wie oben findet man nun, daß die Punkte $-u'T-u'$ in bedecktem Gebiet oder wieder in T liegen. Also liegt jeder Ausnahmepunkt x von T auf der Geraden $|x-z'|_2 = 0$ durch den Punkt $z' = -u'/(u'+1) = (-\frac{1}{6}\,,\frac{1}{6})$

Nun ist $T\cap S = S_1 = T_1$, sodaß jeder Ausnahmepunkt von S_1 auf den Geraden $|x-z|_1 = 0$ und $|x-z'|_2 = 0$ liegen muß. Diese beiden Geraden schneiden sich im Punkt $x_1 = (0\,, \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{13}) \in K\setminus K$, sodaß x_1 der einzig mögliche Ausnahmepunkt von S_1 ist. Weiter sieht man sofort, daß $x_2 = -ux_1 + u$ der einzig mögliche Ausnahmepunkt von S_2 ist (denn uS_2 liegt mod R in bedecktem Gebiet oder in S_1). Die Rekursion $x_{i+1} = ux_i - a$ für $u = -\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ und $a = -u$ liefert nun die Folge von möglichen Ausnahmepunkten $x_{k+1} = (\frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^k, \frac{1}{6} + e^k/6\sqrt{13})$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $e = (-3+\sqrt{13})/2$.

Um zu zeigen, daß dadurch alle möglichen Ausnahmepunkte von $S\setminus\{z\}$ gegeben sind, nehmen wir an, x sei ein solcher. Da x auf der Geraden $|x-z|_2 = 0$ liegt, gibt es ein $k \in N$ mit $|x_{k+1}-z|_2 < |x-z|_2 < |x_k-z|_2$ (d.h. x liegt "zwischen" zwei Gliedern der Folge (x_i)). Dann liegt aber $(-u)^{-k-1}x \bmod R$ zwischen x_1 und x_2, was offenbar nicht der Fall ist.

Schließlich zeigen wir noch, daß $M(x_i) = \frac{1}{3}$ ist und dieses Minimum nicht erreicht wird. Dazu beachten wir, daß erstens $M(x_1) = M(x_2) = \ldots = M(x_k) = \ldots$ ist, sodaß aus $\lim N(x_i) = N(\lim x_i) = N(z) = |N_{K/Q}(z)| = \frac{1}{3}$ sicher $M(x_k) \le \frac{1}{3}$ folgt. Gäbe es nun ein $y \in R$ mit $N(x_k - y) < \frac{1}{3}$, so folgte aus (1.8) die Existenz eines $z \equiv x_k \bmod R$ mit $z = r + s\sqrt{13}$, $|s| < 0.18957$ und $N(z) < \frac{1}{3}$. Man sieht aber leicht ein, daß es ein solches z nicht gibt. Also ist $M(x_k) = \frac{1}{3}$; weil jedoch $N(x_k - y)$ für alle $y \in R$ irrational ist, kann nicht $N(x_k - y) = \frac{1}{3}$ sein, und dies zeigt, daß $M(x_k)$ nicht erreicht wird.

Wir geben nun noch die numerischen Werte für die Punkte $x_1, \ldots, x_7$ an, um einen Vergleich zwischen den Ausnahmepunkten und den Mengen $S_1, \ldots, S_6$ zu ermöglichen:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (\ 0\ , 0.212891683\ldots)\\
x_2 &= (0.116204060\ldots, 0.180662475\ldots)\\
x_3 &= (0.151387818\ldots, 0.170904256\ldots)\\
x_4 &= (0.162040603\ldots, 0.167949705\ldots)\\
x_5 &= (0.165266007\ldots, 0.167055139\ldots)\\
x_6 &= (0.166242581\ldots, 0.166784286\ldots)\\
x_7 &= (0.166538263\ldots, 0.166702279\ldots) \quad \text{usw.}
\end{aligned}
$$

Noch größere Schwierigkeiten bereitet die Bestimmung eines euklidischen Minimums, wenn dieses nicht isoliert ist. Daß es reell-quadratische Zahlkörper gibt, deren zweites Minimum $M_2(K)$ schon nicht mehr isoliert ist, haben Barnes und Swinnerton-Dyer vermutet; Godwin hat diese Vermutung dann 1963 für $K = \mathbf{Q}(\sqrt{23})$ bewiesen. Wahrscheinlich ist es mit den hier vorgestellten Methoden möglich zu zeigen, daß $M_2(K)$ für $K = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$, $m=(2n+1)^2-2$, $n \ge 2$, ein nicht isoliertes zweites Minimum hat. Barnes und Swinnerton-Dyer haben gezeigt, daß in diesem Fall gilt: es ist $M_1(K) = (8n^3+6n^2-6n+1)/2m$; dieses Minimum ist isoliert und wird mod R genau in den Punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{n}{m})$ angenommen.

Entsprechend läßt sich Godwins Ergebnis verallgemeinern, indem man zeigt, daß $M_2(K) \ge (2n(2n+1)\sqrt{m} - (2n^2+m))/2m$ gilt, und daß im Falle von Gleichheit dieses Minimum nicht isoliert ist (im Falle m=7 erhält man übrigens $M_3(K) \ge (6\sqrt{7}-9)/14$).

In der nachstehenden Tafel geben wir die euklidischen Minima $M_1(K)$ und $M_2(K)$ für $K = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$, $m \le 102$, an, soweit sie bekannt sind. Die erste Tabelle dieser Art findet sich bei Heinhold (1939); diese wurde dann von Barnes und Swinnerton-Dyer ergänzt. Die dort noch fehlenden ersten Minima wurden schließlich von Godwin (1955) bestimmt.

Die zweiten Minima, die in diesen drei Arbeiten noch nicht errechnet wurden, sind in der Tabelle *kursiv* gesetzt . Die kleinsten m, für die $M_2(K)$ noch unbekannt ist, sind jetzt m = 19 und m=22 für m ≡ 2,3 mod 4, sowie m = 41 für m ≡ 1 mod 4; in diesen Fällen sind in der Tafel untere Schranken für $M_2(K)$ angegeben.

Es sei noch bemerkt, daß die Tafeln von Barnes und Swinnerton-Dyer einige kleinere Druckfehler enthalten; so ist das erste Minimum von $Q(\sqrt{19})$ fälschlich mit $\frac{31}{38}$ angegeben; diesen Fehler haben Barnes und Swinnerton-Dyer im vierten Teil ihrer Arbeit selbst berichtigt. Außerdem muß dann "$C_1 = (\frac{1}{2}, \frac{9}{38})$ zu "$C_1 = (0, \frac{20}{57})$" geändert werden.

Weiter sind die Mengen C_2 , an denen M_2 angenommen wird, für die Werte m = 17, 35, 37, 65, 101 nicht richtig. Für die Werte m = 17, 37, 65, 101 ist jeweils ein Vorzeichen beim zweiten Punkt in C_2 zu ändern, während für m = 15 (bzw. m = 35) "$C_2 = (0, \frac{2}{5})$" statt "$C_2 = (\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$" (bzw. "$C_2 = (0, \frac{3}{7})$" statt "$C_2 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{7})$") stehen muß.

Euklidische Minima reellquadratischer Zahlkörper (m ≡ 1 mod 4)

m	M_1	M_2	Bem.
5	1/4	1/5	sh. Davenport 1947a
13	1/3	4/13	
17	1/2	8/17	
21	5/7	*12/25*	
29	4/5	23/29	
33	29/44	6/11	
37	3/4	27/37	
41	23/32	≥ 2819/4100	
53	9/7	68/53	
57	14/19	*219/304*	M_1 : Godwin 1955
61	1611/1525	41/39	
65	1	64/65	
69	25/23		
73	1541/2136	irrational; sh. Godwin 1955	
77	19/11	*16/11*	
85	16/9	151/85	
89	1004287/1000004		
93	44/31		
97	33679354/31404817		
101	5/4	125/101	

$m \equiv 2,3 \bmod 4$

m	M_1	M_2	Bemerkungen
2	1/2	1/4	sh. Varnavides (1948b)
3	1/2	1/3	
6	3/4	1/2	
7	9/14	1/2	$M_3(K) \ge (6\sqrt{7}-9)/14$
10	3/2	39/40	
11	19/22	3125/3971	
14	5/4	*31/32*	
15	3/2	7/5	
19	170/171	≥ 10579/12844	
22	27/22	≥ 175903/155236	
23	77/46	$(20\sqrt{23}-31)/46$	Godwin 1963
26	5/2	207/104	
30	3/2	29/20	
31	45/31		
34	9/4	*135/68*	M_3 = *137/72*
35	5/2	17/7	
38	11/4	*173/72*	
39	5/2	*107/48*	
42	7/4	41/24	
43	11829/6962	5902/3483	
46	79877/48668		Godwin 1955
47	253/94	$\ge (42\sqrt{47}-65)/94$	
51	287/102		
55	9/4	*351/176*	
58	3/2	*27477/19604*	
59	125/59		
62	13/4	*367/124*	M_3 = *367/128*
66	15/4	*431/128*	
67	341/162		Godwin 1955
70	891/500		
71	7393/3479		Godwin 1955
74	5/2		
78	7/2		
79	585/158	$\ge (72\sqrt{79}-111)/158$	
82	9/2	1311/328	
83	631/166		
86	10030/5203		Godwin 1955
87	169/58		
91	5/2		
94	4708623/2143294		Godwin 1955
95	7/2		
102	*19/4*	*869/200*	

Die Abschätzung $M(K) \le \sqrt{d}/4$ für die euklidischen Minima $M(K)$ reellquadratischer Zahlkörper stammt von Minkowski (sh. Ges. Abh. I, 320–356 oder auch Hardy & Wright, § 24) und ist bestmöglichst: Letzteres folgt aus

(2.5) <u>Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $m = n^2+1$ quadratfrei. Dann ist für den reellquadratischen Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ $M(K) = \frac{n}{2}$, und dieses Minimum wird mod R genau in $z = \sqrt{m}/2$ angenommen.</u>

Wegen disc $K = 4m$ in diesem Fall ist $\sqrt{d}/4 = \sqrt{n^2+1}/2$, d.h. man kann $\sqrt{d}/4 - M(K)$ beliebig klein machen, indem man n genügend groß wählt.

Zum Beweis von (2.5) wählen wir die GHB $\{1, \vartheta\}$ mit $\vartheta = n + \sqrt{m}$. Dann müssen wir zu jedem $z \in F$ ein $a \in R$ finden mit $|N(z-a)| \le \frac{n}{2}$ und zeigen, daß Gleichheit nur für $z = \sqrt{m}/2$ auftreten kann. Wir behaupten, daß (bei dieser geschickten Wahl von ϑ) sogar $a=0$ genügt. Dazu setzen wir $z = x + y\vartheta$, fassen die Norm N als Funktion von x und y auf und fragen uns, wo N auf F ein Maximum oder ein Minimum annehmen kann. Im Innern von F ist dies nicht möglich, denn wegen $N(x,y) = N(x+y\vartheta) = x^2+2nxy-y^2$,

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2ny = 0 \Rightarrow x = -ny \qquad \text{und}$$
$$\frac{\partial N}{\partial y} = 2nx - 2y = 0 \Rightarrow y = nx$$

ist $z = 0$ der einzige Punkt, in dem beide partielle Ableitungen verschwinden (in z wird weder ein Maximum, noch ein Minimum angenommen: z ist nämlich Sattelpunkt von N). Folglich wird das Minimum und Maximum von N auf dem Rand von F angenommen. Sei nun $y = y_o = \frac{1}{2}$; dann ist $N(x + \frac{1}{2}\vartheta) = x^2 + nx - \frac{1}{4}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x+n$, und folglich wird N auf der Geraden $y = y_o$ nur in $x_o = -\frac{n}{2}$ extremal. Für $n \ge 2$ liegt x_o aber nicht in F, für $n=1$ ist $x_o = -\frac{1}{2}$, und wir sehen (nach ähnlichen Rechnungen für $y_o = -\frac{1}{2}$, bzw. $x_o = \frac{1}{2}$), daß das Maximum von $|N|$ auf F höchstens in den Eckpunkten $z_e = (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ angenommen wird. Dort gilt aber $N(z_e) = \frac{n}{2}$, und die Behauptung folgt wegen $(1+\vartheta)/2 \equiv \sqrt{m}/2$ mod R.

Zu zeigen bleibt noch $M(K,x) = \frac{n}{2}$ für $x = \sqrt{m}/2$. Dazu verwenden wir (1.8) und nehmen an, es sei $M(K,x) < \frac{n}{2}$. Dann gibt es ein $z \equiv x$ mod R mit $z = r + s\sqrt{m}$, $|s| < \sqrt{k(n+1)/2m} < \frac{3}{4}$ und $|N(z)| < k$. Die Bedingungen an s lassen nur $s = \pm\frac{1}{2}$ zu, und aus Symmetriegründen dürfen wir $s = \frac{1}{2}$ annehmen. Damit ist aber $N(r+s\sqrt{m}) = |r^2 - \frac{m}{4}|$, und dies wird offenbar minimal, wenn $|r| \approx \frac{n}{2}$ ist. Einsetzen von $r_o = \frac{n-1}{2}$ und $r_1 = \frac{n-1}{2}$ liefert $N(r_o + s\sqrt{m}) = N(r_1 + s\sqrt{m}) = \frac{n}{2}$, und das war zu zeigen.

Ist n gerade und $m = n^2+1$ quadratfrei, so gilt (2.5) in dieser Form nicht mehr, weil $\{1, \vartheta\}$ keine GHB mehr ist. Dagegen bleibt (2.5) auch in diesem Fall richtig, wenn man den Ring ganzer Zahlen $D(m)$ ersetzt durch den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$; insbesondere ist $M(f)=1$ für $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ und $f=|N|$ (sh. die Beispiele auf S. 2).

Mit einer etwas andern Methode läßt sich (2.8) noch verschärfen: ist nämlich $z \in F$ ein Ausnahmepunkt für $k = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{1}{4m}$, so ist notwendig $|N(x+y\vartheta)| = |x^2+2nxy-y^2| \geq k$. Wegen $|x|, |y| \leq \frac{1}{2}$ ist aber $|x^2-y^2| \leq \frac{1}{4}$ und $|2nxy| \leq n|y|$, also $|N(x+y\vartheta)| \leq |x^2-y^2| + |2nxy| \leq n|y| + \frac{1}{4}$. Beide Ungleichungen zusammen ergeben $n|y| \geq k - \frac{1}{4}$ für jeden Ausnahmepunkt $z \in F$, also $|y| \leq \frac{1}{2} - \delta$, $\delta = \frac{3}{4n} + \frac{1}{4mn}$. Dies ist nur für $-\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{2} + \delta$ oder $\frac{1}{2} - \delta \leq y \leq \frac{1}{2}$ möglich.

Indem wir $F = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (wie in $\mathbf{Q}(\sqrt{14})$) durch $F' = (0,1) \times (0,1)$ ersetzen, erkennen wir, daß jeder Ausnahmepunkt in dem Streifen $|y - \frac{1}{2}| \leq \delta$ liegen muß. Entsprechend folgt nun aus $|N(z)| \leq n|x| + \frac{1}{4}$, daß für einen Ausnahmepunkt $z = x+y\vartheta \in F'$ auch $|x - \frac{1}{2}| \leq \delta$ gelten muß. Also liegt jeder Ausnahmepunkt $x+y\vartheta$ in dem durch $|x - \frac{1}{2}| \leq \delta$, $|y - \frac{1}{2}| \leq \delta$ definierten Rechteck um den Punkt $(1+\vartheta)/2$, an dem, wie wir oben gesehen haben, $M_1(K)$ angenommen wird. Da nun x und y beide in der Nähe von $\frac{1}{2}$ liegen, können wir $|x^2-y^2|$ etwas besser nach oben abschätzen als durch $\frac{1}{4}$; für $x,y \in F$ ist nämlich $|x-y| \leq \delta$, $|x+y| \leq 1$ oder $|x-y| \leq 1$, $|x+y| \leq \delta$. Also ist $|x^2-y^2| = |x-y||x+y| \leq \delta$, und wie oben folgt nun $n|x| \geq k - \delta$ und $n|y| \geq k - \delta$. Weiter ersehen wir hieraus, daß jeder Ausnahmepunkt $z \in F'$ in dem durch $|x - \frac{1}{2}| \leq \delta_1$, $|y - \frac{1}{2}| \leq \delta_1$ definierten Rechteck S liegt, wobei $\delta_1 = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2}$ ist.

Auch wenn wir diesen Schritt unendlich oft wiederholen, können wir δ_1 nicht mehr wesentlich verbessern. Wir werden daher nun die Einheiten $u = \vartheta$ und $u' = \vartheta' = 2n - \vartheta$ verwenden, um weiterzukommen. Wir finden $z \cdot u = (x+y\vartheta)\vartheta = y + (x+2ny)\vartheta$ und $-z \cdot u' = -(x+y\vartheta)\vartheta' = y - 2nx + x\vartheta$. Da mit z auch $z\vartheta$ Ausnahmepunkt sein muß, existiert ein $a = r+s\vartheta \in R$ mit $z\vartheta - a \in S$, d.h. mit $|x+2ny-s-\frac{1}{2}| \leq \delta_1$; wegen $|x - \frac{1}{2}| \leq \delta_1$ muß $|2ny - s| \leq 2\delta_1$ sein. Andererseits folgt aus $|y - \frac{1}{2}| \leq \delta_1$, daß wir $|2ny - n| \leq 2n\delta_1 = 1 + \frac{2}{n}$ haben, und folglich ist $s \in \{n-1, n, n+1\}$. Dividiert man $|2ny - s| \leq 2\delta_1$ durch 2n, so erhält man $|y - \frac{s}{2n}| \leq \delta_1/n = \varepsilon$, und eine entsprechende Rechnung mit ϑ' anstelle von ϑ zeigt, daß auch $|x - \frac{r}{2n}| \leq \varepsilon$ gilt, wo wieder $r \in \{n-1, n, n+1\}$ ist.

Durch Kombination aller Möglichkeiten erhält man jetzt die folgenden neun möglichen Ausnahmemengen: $S_{i,k}: |x - \frac{n-i}{2n}| \leq \varepsilon$, $|y - \frac{n-k}{2n}| \leq \varepsilon$, wo i und k unabhängig voneinander die Zahlen -1, 0, $+1$ durchlaufen. Von diesen neun Mengen enthalten aber $S_{i,k}$ für $(i,k) = (-1,-1), (-1,+1), (+1,-1), (+1,+1)$ keine Ausnahmepunkte, falls nur $n \geq 5$ ist: ist z.B. $|x \pm \frac{n-1}{2n}| \leq \varepsilon$ und $|y \pm \frac{n-1}{2n}| \leq \varepsilon$, so findet man $|x^2-y^2| \leq (n+1)/n^3$ und $2n|xy| \leq (n-1+2\delta)^2/2n$, und für $n \geq 5$ folgt daraus $|N(z)| < k$. Damit sind noch fünf Ausnahmemengen verblieben, nämlich $S_{i,k}$ für $(i,k) = (-1,0), (+1,0), (0,0), (0,-1), (0,+1)$, das sind

$$
\begin{aligned}
S_1 &:= S_{-1,0} : |x - \tfrac{n-1}{2n}| \leq \varepsilon, & |y - \tfrac{1}{2}| \leq \varepsilon, \\
S_2 &:= S_{+1,0} : |x - \tfrac{n+1}{2n}| \leq \varepsilon, & |y - \tfrac{1}{2}| \leq \varepsilon, \\
S_3 &:= S_{0,0} : |x - \tfrac{1}{2}| \leq \varepsilon, & |y - \tfrac{1}{2}| \leq \varepsilon, \\
S_4 &:= S_{0,-1} : |x - \tfrac{1}{2}| \leq \varepsilon, & |y - \tfrac{n-1}{2n}| \leq \varepsilon, \\
S_5 &:= S_{0,+1} : |x - \tfrac{1}{2}| \leq \varepsilon, & |y - \tfrac{n+1}{2n}| \leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Nun sieht man sofort, daß $-\vartheta' S_1$ mod R in bedecktem Gebiet oder in S_4 liegt (für $x+y\vartheta \in S_1$ ist ja mit $r+s\vartheta = -(x+y\vartheta)\vartheta'$: $s=x$); dies impliziert $|y-2nx-(n-1)-\frac{1}{2}| \le \varepsilon$, wegen $|y-\frac{1}{2}| \le \varepsilon$ folgt $|2nx-(n-1)| \le \frac{2\delta}{n}$ und somit $|x-\frac{n-1}{2n}| \le \delta/n^2$. Ganz analoge Überlegungen führen zu $|x-\frac{n+1}{2n}| \le \delta/n^2$ für $z \in S_2$, bzw. zu $|y-\frac{n\pm 1}{2n}| \le \delta/n^2$ für $z \in S_4, S_5$.

Jetzt betrachten wir ϑS_1: dieses Gebiet liegt mod R entweder in bedecktem Gebiet oder in einer der drei Mengen S_3, S_4, S_5. Liegt $(x+y\vartheta)$ mod R in S_3, so muß $|x+2ny-n-\frac{1}{2}| \le \varepsilon$ sein; wegen $|x-\frac{n-1}{2n}| \le \varepsilon$ folgt $|2ny-n-\frac{1}{2n}| \le 2\varepsilon$, also $|y-\frac{1}{2}-{}^1\!/_{4n^2}| \le \frac{\varepsilon}{n} =: \eta$. Entsprechend führt die Möglichkeit, daß $(x+y\vartheta)\vartheta$ mod R in S_4 liegt auf die Bedingung $|y-\frac{1}{2}| \le \eta$, und $(x+y\vartheta)\vartheta$ mod R $\in S_5$ liefert schließlich $|y-\frac{1}{2}-{}^1\!/_{2n^2}| \le \eta$.

Wir behaupten nun, daß die Mengen $|x-\frac{n-1}{2n}| \le \eta$, $|y-\frac{1}{2}| \le \eta$, sowie $|x-\frac{n-1}{2n}| \le \eta$, $|y-\frac{1}{2}-{}^1\!/_{4n^2}| \le \eta$ keinen Ausnahmepunkt enthalten können. Wenn wir dies gezeigt haben, folgt, daß $\vartheta S_1 - n\vartheta$ nur in bedecktem Gebiet oder in S_5 liegen kann. Weiter liegt $\vartheta S_5 - (n+1)\vartheta$ in bedecktem Gebiet oder in S_2. Nun ist $S_2 = 1+\vartheta-S_1$, folglich liegt $S_5 - 1 - (n+2)\vartheta$ in bedecktem Gebiet oder in $-S_1$. Damit können wir (2.4) anwenden mit $t=4$, $a_1 = n\vartheta$, $a_2 = 1+(n+2)\vartheta$, $a_3 = -a_1$, $a_4 = -a_2$, $u = \vartheta$ und finden

$$z_1 = \frac{u^3 a_1 + u^2 a_2 - u a_1 - a_2}{u^4 - 1} = \frac{u a_1 + a_2}{u^2 + 1} = \frac{m - n + (m+1)\vartheta}{2m}$$

als einzig möglichen Ausnahmepunkt von S_1 Weiter sind nun

$$z_2 = \frac{m+n+(m-1)\vartheta}{2m}, \quad z_4 = \frac{m-1+(m-n)\vartheta}{2m}, \quad z_5 = \frac{m+1+(m+n)\vartheta}{2m}$$

die einzigen Ausnahmepunkte von S_2, S_4 und S_5.

Jetzt folgt sofort, daß ϑS_3 mod R nur in bedecktem Gebiet oder wieder in S_3 liegen kann, und (2.4) liefert $z_3 = \frac{1+\vartheta}{2}$ als den einzig möglichen Ausnahmepunkt von S_3.

Wir zeigen nun, daß es keinen Ausnahmepunkt $z = x+y\vartheta$ mit $|x-\frac{n-1}{2n}| \le \eta$ und $|y-\frac{1}{2}| \le \eta$ gibt. Dazu nehmen wir oBdA $-\frac{1}{2}-\eta \le y \le -\frac{1}{2}$ an und finden

$$\begin{aligned} |N(z)| &= x^2 + 2nxy - y^2 \le \left(\frac{n-1}{2n} - \eta\right) + n\left(\frac{n-1}{2n} + \eta\right) - \frac{1}{4} \\ &= \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2n} + {}^1\!/_{4n^2} + \eta(n^3 - n^2 - n + \delta)/n^2 . \end{aligned}$$

Für $n \ge 5$ ist dies aber sicher $< k = \frac{n-1}{2} - \frac{1}{4m}$, sodaß das obige Gebiet dann keinen Ausnahmepunkt enthält (für "große" n erhält man dies fast ohne Rechnung, weil $|N(z)| \le \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2n} + O(n^{-2})$ und $k = \frac{n-1}{2} + O(n^{-2})$ ist; hierbei haben wir die bekannte "Groß-O-Notation verwendet). Ganz analog rechnet man nach, daß es auch keinen Ausnahmepunkt mit $|x-\frac{n-1}{2}| \le \eta$ und $|y-\frac{1}{2}-{}^1\!/_{4n^2}| \le \eta$ gibt (hier ist $|N(z)| \le \frac{n-1}{2} - \frac{1}{4n} + O(n^{-2})$).

Jetzt müssen wir noch $M(z_i)$ für die möglichen Ausnahmepunkte z_i bestimmen. Daß $M(z_3) = \frac{n}{2}$ ist, hatten wir bereits gesehen. Wir benutzen nun (1.8) und stellen dazu die Punkte z_i in der Form $r+s\sqrt{m}$ dar; wir finden

$$z_1 \equiv \frac{(m+1)}{2m}\sqrt{m},\ z_2 \equiv \frac{(m-1)}{2m}\sqrt{m},\ z_4 \equiv \frac{1}{2}+\frac{(m-n)}{2m}\sqrt{m},\ z_5 \equiv \frac{1}{2}+\frac{(m+n)}{2m}\sqrt{m}\ (n \equiv 1 \bmod 2)$$

$$z_1 \equiv \frac{1}{2}+\frac{(m+1)}{2m}\sqrt{m},\ z_2 \equiv \frac{1}{2}+\frac{(m-1)}{2m}\sqrt{m},\ z_4 \equiv \frac{(m-n)}{2m}\sqrt{m},\ z_5 \equiv \frac{(m+n)}{2m}\sqrt{m}\ (n \equiv 0 \bmod 2)$$

(1.8) liefert nun wegen $a=n$ die Schranke $\mu_2 = \sqrt{k(n+1)/2m} < 0.5$. Nun ist im Falle $n \equiv 1 \bmod 2$

$$\min_{x \in \mathbb{Z}} |N(x+z_2)| = |N(\tfrac{n-1}{2}+z_2)| = \frac{n-1}{2}+\frac{1}{4m}$$

und

$$\min_{x \in \mathbb{Z}} |N(x+z_4)| = |N(\tfrac{n-3}{2}+z_4)| = \frac{n-1}{2}-\frac{1}{4m},$$

und eine entsprechende Rechnung für den Fall $n \equiv 0 \bmod 2$ zeigt

(2.5′) <u>Sei</u> $\underline{n \in \mathbb{N}}$, $m=n^2+1$, $\underline{R} \ \underline{=} \ \underline{\mathbb{Z}[\sqrt{m}]}$ <u>und</u> <u>f</u> <u>der</u> <u>Absolutbetrag</u> <u>der</u> <u>Norm</u> <u>in</u> $\underline{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$<u>.</u> <u>Dann</u> <u>ist</u> $M_1(f) = n/2$ <u>und</u> <u>im</u> <u>Falle</u> $\underline{n \geq 2}$ $M_2(f) = \frac{n-1}{2} - \frac{1}{4m}$.
<u>Diese</u> <u>Minima</u> <u>werden</u> <u>mod</u> <u>R</u> <u>nur</u> <u>in</u> $C_1 = \{\sqrt{m}/2\}$ und

$C_2 = \{\frac{(m\pm 1)}{2m}\sqrt{m},\ \frac{1}{2}+\frac{(m\pm n)}{2m}\sqrt{m}\}$ <u>für</u> $\underline{n \equiv 1 \bmod 2}$, <u>und</u>

$C_2 = \{\frac{1}{2}+\frac{(m\pm 1)}{2m}\sqrt{m},\ \frac{(m\pm n)}{2m}\sqrt{m}\}$ <u>für</u> $\underline{n \equiv 0 \bmod 2}$

<u>angenommen.</u> <u>Ist</u> <u>außerdem</u> <u>n</u> <u>ungerade</u> <u>und</u> <u>m</u> <u>quadratfrei,</u> <u>so</u> <u>ist</u> $\underline{R = D(m)}$, <u>sowie</u> $M_1(f) = M_1(K)$, $M_2(f) = M_2(K)$.

Die ersten Minima $M_1(f)$ der Ringe $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ wurden schon von Heinhold (1939) gefunden. Analoge Sätze für $m=n^2 \pm r$, $r= 1, 2, 4$, stammen von Barnes und Swinnerton-Dyer und von Varnavides. Beide haben jedoch zum Beweis recht komplizierte Lemmata benutzt (z.B. die Theoreme H, J, K von BSD), die sich in unserem Beweis als überflüssig herausgestellt haben.

Es überrascht nun nicht, daß man mit denselben Methoden auch die Fälle $r \in \{1, 2, 4, n\}$ behandeln kann (quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ mit $m=n^2 \pm r$, $r|4n$, $-n \leq r \leq n$ heißen Körper vom R-D-Typ nach C. Richaud und G. Degert, die die FE in diesen Körpern explizit angegeben haben), auch wenn man die ersten beiden Minima nicht immer so einfach bestimmen kann (wir haben bereits die Vermutung geäußert, daß im Falle $m = n^2-2$, $n \geq 5$, $n \equiv 1 \bmod 2$, das zweite Minimum nicht isoliert ist). So gilt z.B. die folgende Tabelle:

(2.6) Euklidische Minima für reellquadratische Körper vom R-D-Typ

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ (für $I=1$) und $R = \mathbb{Z}[(1+\sqrt{m})/2]$ (für $I=2$), und f der Absolutbetrag der Norm. Dann wird das erste Minimum durch die folgende Tabelle gegeben:

m	n	I	M(K)	C(K)
n^2+1	$n \geq 1$	1	$\frac{n}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
	$n \equiv 0\ (2),\ n \geq 1$	2	$\frac{n}{8}$	
n^2-1	$n \equiv 0\ (2),\ n \geq 2$	1	$\frac{n-1}{2}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
n^2+2	$n \equiv 0\ (2),\ n \geq 2$	1	$\frac{2n-1}{4}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	$n \equiv 1\ (2),\ n \geq 3$	1	$\frac{2n^3-3n^2+6n-7}{4m}$	
n^2-2	$n \equiv 0\ (2),\ n \geq 4$	1	$\frac{2n-1}{4}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	$n \equiv 1\ (2),\ n \geq 3$	1	$\frac{2n^3-3n^2-6n+9}{4m}$	
n^2+4	$n \equiv 1\ (2),\ n \geq 3$	2	$\frac{n^2-2n+1}{4n}$	
n^2-4	$n \equiv 1\ (2),\ n \geq 3$	2	$\frac{n^2-5}{4n+8}$	
n^2+n	$n \equiv 0\ (2)\ \ n \geq 2$	1	$\frac{n+1}{4}$	$(0, \frac{1}{2})$
	$n \equiv 1\ (2)\ \ n \geq 1$	1	$\frac{n+1}{4}$	$(\frac{1}{2}, 0)$

Darüberhinaus ist das zweite Minimum in folgenden Fällen bekannt:

m	n	I	$M_2(K)$	$C_2(K)$
n^2+1	$n \equiv 0\ (2)$	1	$\frac{n-1}{2} - \frac{1}{4m}$	$\left(0, \frac{m \pm 1}{2m}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{m \pm n}{2m}\right)$
		2	$\frac{n}{8}(1 - \frac{1}{m})$	
	$n \equiv 1\ (2)$	1	$\frac{n-1}{2} - \frac{1}{4m}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{m \pm 1}{2m}\right), \left(0, \frac{m \pm n}{2m}\right)$
n^2-1	$n \equiv 0\ (2)$	1	$\frac{m-1}{2n+2}$	$\left(0, \pm \frac{n}{2n+2}\right)$
n^2+2	$n \equiv 0\ (2)$	1	$\frac{2n^3-3n^2+4n-2}{4n}$	
n^2+4	$n \equiv 1\ (2)$	2	$\frac{n^3-2n^2+5n-8}{4m}$	

Die Arbeit an (2.6) ist, wie man sieht, noch nicht abgeschlossen. Für den Beweis hilfreich ist jedenfalls

(2.7) Sei f der Absolutbetrag der Norm in $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$; dann ist

$$M(f) \le \frac{1}{4}\begin{cases} \max\{p,\ 2n+1-p\}, \text{ wo } R=\mathbb{Z}[\sqrt{m}],\ m=n^2+p,\ 1\le p\le 2n \\ \max\{p,\ 2n+2-p\}, \text{ wo } R=\mathbb{Z}[\beta_m],\ m=(2n+1)^2+4p,\ 1\le p\le 2n+1 \end{cases}$$

Hierbei ist $\beta_m = (1+\sqrt{m})/2$. Weiter wird bei Gleichheit das Minimum mod R höchstens in den Punkten $z_1 = \sqrt{m}/2$ oder $z_2 = (1+\sqrt{m})/2$ (falls $R = \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$), bzw. in $z_1 = \beta_m/2$ oder $z_2 = (1+\beta_m)/2$ (falls $R = \mathbb{Z}[\beta_m]$) angenommen.

Das Resultat (2.7) stammt von Heinhold (1939; sh dazu auch Lekkerkerker 1969, p. 422); problemlos erhält man daraus die Minkowskische Ungleichung für quadratische Zahlkörper:

(2.8) Sei K quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante d; dann ist $M(K) \le \sqrt{d}/4$.

Wählt man die Basis $\{1, \vartheta\}$ mit $\vartheta = n+\sqrt{m}$, wo $m=n^2+p$, $1\le p\le n$, ist, so findet man schnell, daß $\max\{N(z): z\in F'\}$ gleich den in (2.7) angegebenen Schranken von Heinhold ist; hierbei ist $F' = (0,\ 0.5)\times(0,\ 0.5)$. Leider genügt das nicht, um (2.7) zu beweisen, weil $F' \cup -F' \cup F'^{\sigma} \cup -F'^{\sigma}$ hier kein Fundamentalbereich ist (wie das noch im Falle der Basis $\{1, \sqrt{m}\}$ der Fall gewesen ist).

Mit (2.7) können wir einige $M(K)$ aus (2.6) nach oben abschätzen: ist z.B. $m = n^2-1$, so schreiben wir $m = (n-1)^2+2n-2$ und erhalten aus (2.7) die Schranke $M(K) \le \frac{2n-2}{4} = \frac{n-1}{2}$.

Zur Abschätzung von $M(K)$ nach unten verwenden wir (1.8). Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß die Schranken μ_2 manchmal von n abhängen (z.B. im Falle $m = n^2 \pm 2$). Der Beweis, daß $M(K)$ in (2.6) dann wirklich exakt ist, ist in diesen Fällen recht mühsam (sh. dazu Barnes und Swinnerton-Dyer).

Barnes und Swinnerton-Dyer haben in ihrer Arbeit einige interessante Sätze über die euklidischen Minima in reellquadratischen Zahlkörpern bewiesen; am Ende des zweiten Teils ihrer Arbeit haben sie darauf hingewiesen, daß sich diese Sätze auf Körper mit beliebigem Einheitenrang >1 verallgemeinern lassen. Insbesondere für ihr Theorem M (unser 2.12) ist diese Verallgemeinerung bis heute nur für Körper mit einer Grundeinheit gelungen (sh. van der Linden 1985, Theorem 5.7). Wir wollen daher die Schwierigkeiten, die sich hierbei ergeben, genauer beschreiben. Wir zeigen dazu

(2.9) <u>Sei $\underline{K}$ ein Zahlkörper und $\{u_1, ..., u_l\}$ ein System unabhängiger Einheiten. Dann gibt es eine endliche Menge $Z \subset R$ mit der Eigenschaft: für alle $x \in K$ gilt</u>

$$M(K,x) = \inf_u \min_{z \in Z} N(x_u + z)$$

<u>wobei das Infimum über alle Einheiten u der von den u_i erzeugten Untergruppe von $R^\times$ gebildet wird, und wo $x_u \in F$ durch die Kongruenz $x_u \equiv xu$ mod R bestimmt ist.</u>

Bew.: Sei $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ eine Ganzheitsbasis und $Z = \{z = \sum r_i \alpha_i : |r_i| < \mu_i + 0.5\}$ für die μ_i aus (1.12). Wir behaupten, daß dann

$$M(\underline{K},x) = \inf_u \min_{z \in Z} N(x_u + z) \quad =: k$$

gilt. Ansonsten wäre nämlich $M(\underline{K},x) < k$, und es gibt ein $y \in R$ mit $N(x-y) < k$. Wie in (1.12) folgt nun die Existenz einer Einheit u mit $(x-y)u = \sum r_i \alpha_i$ und $|r_i| < \mu_i$. Jetzt gilt $(x-y)u \equiv xu \equiv x_u$ mod R für ein $x_u \in F$; also ist $z = (x-y)u - x_u \in R$. Mit $z = \sum s_i \alpha_i$ und $x_u = \sum t_i \alpha_i$ ist dann $s_i = r_i - t_i$, also $|s_i| \le |r_i| + |t_i| \le \mu_i + 0.5$ und damit $z \in Z$ im Widerspruch zur Annahme $M(\underline{K},x) < k$.

Ist $x \in K$, so gibt es offenbar nur endlich viele $x_u \in F$ (denn mit $x = \frac{a}{b}$ ist $xe^{\Phi(b)} \equiv x$ mod R für jede Einheit $e \in R^\times$. Ist dagegen $x \in \underline{K} \setminus K$, so kann niemals $xe \equiv x$ mod R sein (denn aus $xe - x = x(e-1) \in R$ folgt ja $x \in K$). In diesem Fall sind dann die $x_u \in F$ paarweise verschieden, und wegen der Kompaktheit von F gibt es einen Häufungspunkt w der x_u. Zur Abschätzung von $M(\underline{K},w)$ verwenden wir

(2.10) <u>Mit den Bezeichnungen von (2.9) sei w ein Häufungspunkt der x_u. Dann gilt $M(\underline{K},x) \le M(\underline{K},w)$.</u>

Bew.: Ist w ein Häufungspunkt der x_u, so gibt es eine gegen w konvergierende Teilfolge (x_e) der (x_u), und da die Norm stetig ist, erhalten wir

$$\inf_u N(x_u + z) \le \lim N(x_e + z) = N(\lim x_e + z) = N(w+z) \qquad \text{für alle } z \in Z.$$

Nun ist aber mit w auch jedes w_u ein Häufungspunkt der x_u, weil mit $x_e \mapsto w$ auch $x_{eu} \mapsto w_u$ gilt (hier ist natürlich $x_{eu} \in F$ durch $xeu \equiv x_{eu}$ mod R für Einheiten $e,u \in R^\times$ definiert). Also können wir in obiger Überlegung w durch w_u ersetzen und haben für alle u und für alle $z \in Z$ die Ungleichung $\inf N(x_u + z) \le N(w_u + z)$, und die Bildung des Minimums über alle $z \in Z$ liefert

$$M(\underline{K},x) = \inf_u \min_{z \in Z} N(x_u + z) \le \min_{z \in Z} N(w_u + z).$$

Dabei durften wir inf und min vertauschen, weil Z endlich ist. Weil schließlich $M(\underline{K},w) = \inf_u \min_{z \in Z} N(w_u + z)$ ist, folgt $M(\underline{K},x) \le M(\underline{K},w)$ wie behauptet.

Jetzt zeigen wir die Verallgemeinerung von Theorem L (Barnes und Swinnerton-Dyer):

(2.11) i) <u>Zu jedem</u> $x \in \underline{K}$ <u>gibt es ein</u> $w \in \underline{K}$ <u>mit</u> $M(\underline{K},x) = M(\underline{K},w)$, <u>und</u> $M(\underline{K},w)$ <u>wird erreicht;</u>

ii) <u>die Menge</u> $\{M(\underline{K},x) : x \in \underline{K}\}$ <u>ist abgeschlossen</u>.

Zum besseren Verständnis von (2.11) halte man sich das Beispiel D(13) vor Augen: hier hatte man eine Folge x_1 , x_2 , ... von Punkten mit $M(\underline{K},x_i) = \frac{1}{3}$, wobei dieses Minimum bei keinem x_i erreicht wird. Dagegen ist $M(\underline{K},w) = \frac{1}{3}$ im Häufungspunkt $w = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ der x_i, und in w wird das Minimum erreicht.

Bew. von i): Sei (x_e) eine Teilfolge der x_u mit

$$M(\underline{K},x) = \lim_e \min_{z \in Z} N(x_e+z).$$

OBdA dürfen wir annehmen, daß die x_e paarweise verschieden sind: Wird $M(\underline{K},x)$ nicht erreicht, ist dies nämlich sicher möglich, im andern Fall ist nichts zu zeigen. Sei nun $w \in F$ ein Häufungspunkt der x_e; dann gibt es eine gegen w konvergente Teilfolge der x_e, die wir ebenfalls wieder mit (x_e) bezeichnen wollen. Es gilt dann

$$M(\underline{K},x) = \lim_e \min_{z \in Z} N(x_e+z) = \min_{z \in Z} N(w+z) \geq M(\underline{K},w),$$

während aus (2.10) $M(\underline{K},x) \leq M(\underline{K},w)$ folgt. Also ist $M(\underline{K},x) = M(\underline{K},w)$, und wegen $M(\underline{K},w) = \min_{z \in Z} N(w+z)$ wird $M(\underline{K},w)$ tatsächlich erreicht.

ii) Sei $k \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt der Menge $\{M(\underline{K},x) : x \in \underline{K}\}$ und $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in F mit $\lim_{i \to \infty} M(\underline{K},x_i) = k$. Wir müssen dann ein $w \in F$ finden mit $k = M(\underline{K},w)$.
Nach i) dürfen wir annehmen, daß $M(\underline{K},x_i)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ erreicht wird. Also existiert für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine Einheit $u = u(i) \in R^{\times}$ mit der Eigenschaft

$$M(\underline{K},x_i) = \min_{z \in Z} N(x_{iu} + z),$$

(wobei $x_{iu} \equiv x_i u \bmod R$ ist). Sei nun w ein Häufungspunkt der x_{iu} und (x_e) eine gegen w konvergierende Teilfolge der x_{iu}. Dann ist

$$k = \lim_{i \to \infty} M(\underline{K},x_i) = \lim_{i \to \infty} \min_{z \in Z} N(x_{iu} + z) = \lim_e \min_{z \in Z} N(x_e+z)$$
$$= \min_{z \in Z} N(w+z) \geq M(\underline{K},w)$$

Nach (2.10) gilt aber auch $M(\underline{K},x) \geq \inf_i M(\underline{K},x_{iu}) = k$, folglich ist $M(\underline{K},x) = k$.

Ein wichtiger Spezialfall von (2.11.ii) ist: es gibt ein $x \in \underline{K}$ mit $M(\underline{K},x) = M(\underline{K})$; diese Beobachtung stammt von Heinhold (1939). Barnes und Swinnerton-Dyer haben vermutet, daß es sogar ein $x \in K$ gibt mit $M(\underline{K},x) = M(\underline{K})$, und daß insbesondere $M(\underline{K}) = M(K)$ gilt. Wenn man sich an das Beispiel D(13) erinnert, so scheint diese Vermutung auf den ersten Blick fast trivial: man suche ein $x \in K$ mit $M(\underline{K},x) = M(\underline{K})$ und wähle dann w als den Häufungspunkt der x_u. Der Haken hierbei ist natürlich, daß w nicht in K zu liegen braucht (hätten die x_u nur endlich viele Häufungspunkte wie in D(13), so gäbe es eine Einheit u mit $w \equiv w_u \bmod R$, und dies implizierte in der Tat $w \in K$; man scheint aber die Möglichkeit, daß die x_u unendlich viele Häufungspunkte haben, nicht so einfach ausschließen zu können).

Selbst die weniger weitgehende Vermutung $M(K) = M(\underline{K})$ ist bisher nur für Körper mit Einheitenrang 1 bewiesen worden:

(2.12) (Theorem M von Barnes und Swinnerton-Dyer (für $n = 2$), Prop. 5.2. von van der Linden (für Einheitenrang 1)):
<u>Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $y \in K$ mit $M(\underline{K},y) > M(\underline{K}) - \varepsilon$; Insbesondere ist $M(K) = M(\underline{K})$.</u>

Bew.: Sei u eine Einheit von K mit $|u|_1 > 1$; aus dem Beweis des Dirichletschen Einheitensatzes folgt, daß die Potenzen von u "von der 1 wegbleiben" in dem Sinne, daß es ein $c > 0$ gibt mit $|u^m - 1|_1 > c$ und $|u^m - 1|_2 > c$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Sei weiter $x \in K$ ein Punkt mit $M(\underline{K},x) = M(\underline{K})$ (ein solches x gibt es nach 2.11.ii). OBdA dürfen wir annehmen, daß x Häufungspunkt der x_u in F ist (sonst ersetzen wir x durch einen solchen Häufungspunkt x', denn nach (2.9) ist $M(\underline{K},x') \geq M(\underline{K},x)$, und wegen $M(\underline{K},x) = M(\underline{K})$ und $M(\underline{K},x') \leq M(\underline{K})$ muß auch $M(\underline{K},x') = M(\underline{K})$ sein).
Also gibt es eine Potenz u^m von u, sodaß für ein beliebig vorgegebenes $\delta > 0$ $u^m x \equiv x + z \bmod R$ und $|z|_j < \delta c$ für $j = 1,2$ ist. Daher existiert ein $a \in R$ mit $u^m x = a + x + z$, d.h. mit $(u^m - 1)x = a + z$. Jetzt setzen wir $y = a/(u^m - 1)$ und haben $y \in K$, sowie $x - y = z/(u^m - 1)$. Damit haben wir ein $y \in K$ gefunden, das nicht nur nahe bei x liegt, sondern für das auch die Potenzen uy, $u^2 y$, ..., $u^m y$ nahe bei ux, $u^2 x$, ..., $u^m x$ liegen; genauer: für $0 \leq k \leq m$ gilt

$$|u^k x - u^k y|_1 = |u^k(x-y)|_1 \leq |u^m(x-y)|_1 = |z/(1-u^{-m})|_1 < \frac{\delta c}{c} = \delta$$

wegen $|u|_1^k \leq |u|_1^m$ und $|1 - u^{-m}|_1 < \frac{1}{c}$. Analog erhält man

$$|u^k x - u^k y|_2 = |u^k(x-y)|_2 \leq |(x-y)|_2 = |z/(u^m - 1)|_2 < \frac{\delta c}{c} = \delta$$

wegen $|u|_2 < 1$ und $1/|u^m - 1|_2 < \frac{1}{c}$. Diese beiden Ungleichungen lassen sich auch in der Form $|x_e - y_e|_1 < \delta$, $|x_e - y_e|_2 < \delta$ für $e = u^k$ schreiben. Unsere Aufgabe ist es nun, $M(\underline{K},x)$ und $M(\underline{K},y)$ zu vergleichen. Nach (2.9) ist

$$M(\underline{K},x) = \inf_{u} \min_{z \in Z} N(x_u + z), \quad \text{während wegen } u^m y \equiv y \bmod R$$

$$M(\underline{K},y) = \min_{u'} \min_{z \in Z} N(y_{u'} + z)$$

gilt, wobei u' nur die Einheiten $1, u, u^2, \ldots, u^{m-1}$ zu durchlaufen braucht. Wegen $x_u, y_u \in F$ und $z \in Z$ liegen die Punkte $x_u + z$ und $y_u + z$ in der beschränkten und abgeschlossenen Menge $Z' = \{ \sum r_i \alpha_i : |r_i| \leq \mu_i + 1 \}$.

Folglich gibt es ein $\delta>0$ mit der Eigenschaft, daß für alle $x,y\in Z'$ gilt: aus $|x-y|_1<\delta$ und $|x-y|_2<\delta$ folgt $|N(x)-N(y)|<\varepsilon$ für das vorgegebene $\varepsilon>0$. Durchläuft u' die Einheiten $1, u, \ldots, u^{m-1}$, so gilt für alle $z\in Z$ und $j=1, 2$ $|(x_{u'}+z)-(y_{u'}+z)|_j<\delta$; daher ist auch $|N(x_{u'}+z)-N(y_{u'}+z)|<\varepsilon$, insbesondere also $N(x_{u'}+z)<N(y_{u'}+z)+\varepsilon$. Jetzt folgt sofort

$$\min_{u'}\min_{z\in Z} N(x_{u'}+z) < \min_{u'}\min_{z\in Z} N(y_{u'}+z) + \varepsilon = M(\underline{K},y)+\varepsilon, \text{ aber wegen}$$

$$M(\underline{K},x) = \inf_{u}\min_{z\in Z} N(x_u+z) \le \min_{u'}\min_{z\in Z} N(x_{u'}+z)$$

ist das bereits die Behauptung.

Die Schwierigkeit bei einer Verallgemeinerung dieses Satzes auf Körper mit beliebigem Einheitenrang ≥ 1 liegt einzig und allein in der Konstruktion eines $y\in K$ mit der Eigenschaft, daß die endlich vielen y_u nahe bei den entsprechenden x_u liegen. Eine solche Konstruktion ist mir bisher allerdings nicht gelungen.

Wir wollen der Vollständigkeit halber noch die Verallgemeinerung des "Theorem G" von Barnes und Swinnerton-Dyer auf Körper mit Einheitenrang ≥ 1 angeben; sie lautet

(2.13) <u>Gilt</u> $M(\underline{K},x)<k$ <u>für alle</u> $x\in\underline{F}$ <u>bis auf eine endliche Ausnahmemenge</u> G, <u>dann gibt es ein</u> $k'<k$, <u>sodaß</u> $M(\underline{K},x)\le k'$ <u>für alle</u> $x\in\underline{F}\setminus G$ <u>gilt.</u>

Hieraus folgt insbesondere, daß $M_1(K)$ isoliert ist, wenn es nur an endlich vielen Stellen in F angenommen wird. Der Beweis von Barnes und Swinnerton-Dyer funktioniert auch im allgemeinen Fall, wenn man die Einheit u so wählt, daß $|u|_j\neq 1$ für alle j mit $1\le j\le r+s$ wird und (2.3) verwendet.

Wir wollen noch ein paar Worte zur Bestimmung von $M^2(K)$ sagen: die Begriffe und auch die Sätze aus § 2 haben direkte Analoga, wenn man R durch die Menge der Kettenbrüche der Länge $\le k$ ersetzt. Dasselbe gilt auch für (1.8) und (1.12); allerdings sind die Analoga von (1.8) und (1.12) wahrscheinlich wertlos, da es z.B. unendlich viele Kettenbrüche $r+s\sqrt{m}$ der Länge 2 mit beschränktem $r,s\in\mathbb{Q}$ gibt und daher die Bedingungen (1.8.a,b,c) unendlich viele mögliche $z\in K$ zulassen.

Um also $M^2(K)$ nach unten abzuschätzen, können wir nicht auf (1.8) oder (1.12) zurückgreifen; außer der Abschätzung (0.13) hat sich in Ringen mit Klassenzahl >1 folgende Methode bewährt, die wir am Beispiel $K=\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ vorführen wollen (damit wird auch die Frage beantwortet, die Cooke (1977, S. 75 unten) gestellt hat). Wir wählen eine Menge von Kettenbrüche der Länge 2, z.B.

$$R_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{(1+\sqrt{10})}{2}, \frac{(4+\sqrt{10})}{6}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}\right\}$$

ihre Nenner haben die Normen 1, 4, 4, 6, 9, 9. Dann versuchen wir, zu jedem Punkt x aus $F=(0, 0.5)\times(0, 0.5)$ ein y zu finden, das mod R einem Kettenbruch a_2/b_2 aus R_2 kongruent ist und $|N_{K/\mathbb{Q}}(x-y)|<k\cdot|N_{K/\mathbb{Q}}(b_2)|$ erfüllt.

Wenn wir $k = 0.99$ wählen, können wir so ganz F bis auf die Ausnahmemenge $S = (0, 0.001) \times (0.499, 0.5)$ bedecken. Wie im normeuklidischen Fall folgt nun leicht, daß $z = \sqrt{10}/2$ der einzig mögliche Ausnahmepunkt ist. Damit bleibt nur noch $M(K,z)$ zu bestimmen. Da $y = a_2/b_2 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ ein Kettenbruch der Länge 2 mit $N_{K/\mathbb{Q}}(b_2) = 4$ ist und $|N_{K/\mathbb{Q}}(z-y)| = \frac{1}{4}$ ist, gilt sicher $M^2(K,z) \leq 1$; die dazugehörige Teilerkette ist $\sqrt{10} = 2q_1 + r_1$, $2 = r_1 q_2 + r_2$ mit $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $r_1 = -2 + \sqrt{10}$, $r_2 = 6 - 2\sqrt{10}$ und $|N_{K/\mathbb{Q}}(r_2)| = 4 = N_{K/\mathbb{Q}}(2)$.

Nun gibt es aber keine Teilerkette der Länge 2 mit $|N_{K/\mathbb{Q}}(r_2)| < 4$, denn ist $P = (\sqrt{10}, 2)$ das Primideal der Norm 2 über (2), so gilt $r_1, r_2 \in P$, und insbesondere ist $N_{K/\mathbb{Q}}(r_2) \equiv 0 \bmod 2$. Es müßte daher $|N_{K/\mathbb{Q}}(r_2)| = 0$ oder $|N_{K/\mathbb{Q}}(r_2)| = 2$ sein; letzteres ist unmöglich, da P kein Hauptideal ist, und aus demselben Grund kann auch nicht $r_2 = 0$ sein, da sonst $P = (r_1)$ folgte.

Also ist $M^2(K) = M^2(\underline{K}) = M^2(K,z) = 1$, und K hat euklidische Tiefe 1 (denn genau wie oben zeigt man, daß es keine von $(\sqrt{10},2)$ ausgehende Teilerkette mit $|N_{K/\mathbb{Q}}(r_k)| < 4$ gibt). Definiert man die Mengen B_j ($j = 1, 2, \ldots, \infty$) durch $B_j = (F \cap K) \setminus F_j$ (F ist ein Fundamentalbereich; die $F_j \subset K$ sind auf S. 12 definiert), so gilt hier $B_1 = B_2 = \ldots = B_\infty = \{\pm\sqrt{10}/2\}$.

Auf dieselbe Art und Weise ist die folgende Tabelle zustande gekommen:

m	$M^2(K)$	B_1	$B_2 = B_\infty$
6	1/4	$\{\}$	$\{\}$
10	1	$\{(0, \frac{1}{2})\}$	$\{(0, \frac{1}{2})\}$
14	1/4	$\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$	$\{\}$
15	1	?	$\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$
26	1	?	$\{(0, \frac{1}{2})\}$
30	3/2	?	$\{(0, \frac{1}{2})\}$
34	1	?	$\{(\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3})\}$
35	7/5	?	$\{(0, \frac{2}{5}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$
39	5/2	?	$\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$
65	1	$\{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$	$\{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$
85	1	?	$\{(\pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{6})\}$

Aus dieser Tabelle kann man entnehmen, daß z.B. die euklidische Tiefe von D(26) und D(30) gleich 2 ist. Bereits Cooke hat versucht, die euklidische Tiefe dieser beiden Ringe zu bestimmen. Für D(30) konnte er zeigen, daß die euklidische Tiefe ≤ 3 ist, und er hat vermutet, daß sie gleich 2 ist. Im Falle D(26) hat er gezeigt, daß die euklidische Tiefe endlich ist; daß er diese nicht bestimmen konnte, lag an einem Rechenfehler. Er schreibt auf S. 81 (1977), daß er mit Kettenbrüchen der Länge 2 ganz F bis auf die folgenden Punkte bedecken kann: $(0,\frac{1}{2})$, sowie $(\pm\frac{2}{5}, \pm\frac{2}{5})$. Allerdings ist $\frac{\sqrt{26}}{3}$ ein Kettenbruch der Länge 2 und z.B. $|N_{K/\mathbb{Q}}(z - \frac{\sqrt{26}}{3})| = \frac{2}{45} = \frac{2}{5} \cdot N_{K/\mathbb{Q}}(3) < N_{K/\mathbb{Q}}(3)$ für $z = \frac{2 + 2\sqrt{26}}{5}$.
Damit folgt auch aus seinen Rechnungen, daß nur der Punkt $\sqrt{26}/2$ unbedeckt bleibt und die euklidische Tiefe gleich 2 ist.

Weiter bleibt noch anzumerken, daß D(10) euklidische Tiefe 1 hat (und nicht 2, wie Cooke schreibt), da hier $B_1 = B_\infty = \{\sqrt{10}/2)\}$ ist; Entsprechendes gilt für D(65).

Mit dieser Methode lassen sich auch die Ergebnisse von Cooke (1976) bestätigen, wonach die Ringe D(m) für m = 14, 22, 23, 31, 38, 43, 46, 53, 61, 69, 77, 89, 93, 97, 113, 129, 133, 137, 181, 253 2-stufig normeuklidisch sind; darüberhinaus erhält man für m = 47, 59, 62, 67, 71, 101, 109, 149, 157, 161, 173, 177, 193, 197, 201, 213 neue 2-euklidische Ringe.

Man muß hierbei allerdings beachten, daß die für $M^2(K)$ erzielten Schranken sowie die möglichen Ausnahmepunkte von der Anzahl der verwendeten Kettenbrüche der Länge 2 abhängt; so kann man in D(14) mit Kettenbrüchen der Länge 2, deren Nenner eine Norm ≤ 11 haben, ganz F bedecken bis auf die beiden Punkte $x_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{7})$ und $x_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Wegen (0.13) ist $M^2(x_2) = \frac{1}{4}$; wegen $|N_{K/\mathbb{Q}}(x_1 - \frac{2}{7}\sqrt{14})| = \frac{1}{28}$ und weil $\frac{2}{7}\sqrt{14}$ ein Kettenbruch der Länge 2 mit Nenner $7+2\sqrt{14}$ ist, gilt sicher auch $M^2(x_1) \leq \frac{1}{4}$ (dies genügt bereits, um $M^2(K) = \frac{1}{4}$ zu beweisen).
Verwendet man aber auch Kettenbrüche, deren Nenner Norm 13 haben, und beachtet, daß $z = (6+6\sqrt{14})/13$ ein solcher ist, so findet man, daß $|N_{K/\mathbb{Q}}(x_1 - z)| < \frac{1}{52}$ ist; dies zeigt, daß x_2 der einzige Ausnahmepunkt für k = 1/4 ist.

Wie Cooke bemerkt hat, stehen die Punkte aus B_∞ in einer Beziehung zur Klassenzahl von K; um dies einzusehen, definieren wir eine Abbildung φ : $K \mapsto Cl(K)$ durch $\varphi(\frac{\alpha}{\beta}) = [(\alpha,\beta)]$ (d.h. einem $x = \frac{\alpha}{\beta}$ wird die von dem Ideal (α,β) erzeugte Idealklasse zugeordnet). φ ist wohldefiniert: ist nämlich $\alpha/\beta = \alpha'/\beta'$, so folgt $\alpha\beta' = \alpha'\beta$ und damit $(\alpha,\beta) \sim (\alpha')(\alpha,\beta) = (\alpha\alpha', \alpha'\beta) = (\alpha\alpha', \alpha\beta') \sim (\alpha',\beta')$, und wir haben $[(\alpha,\beta)] = [(\alpha',\beta')]$

Ganz einfach folgt nun

(2.14) $\varphi(B_\infty)$ <u>enthält alle nichttrivialen Idealklassen.</u>

Bew.: Sei I ein Ideal in R, aber kein Hauptideal. Wir wählen $\beta \in I\setminus\{0\}$ so, daß $|N_{K/\mathbb{Q}}(\beta)|$ minimal wird, und dann ein $\alpha \in I$ mit $I = (\alpha,\beta)$. Indem wir von α ein geeignetes Vielfaches von β subtrahieren, können wir $\frac{\alpha}{\beta} \in F$ erreichen, ohne die Eigenschaft $I = (\alpha,\beta)$ zu zerstören.
Wir behaupten nun, daß $\frac{\alpha}{\beta} \in B_\infty$ ist. Für jede von (α,β) ausgehende Teilerkette ist nämlich $r_k \in (\alpha,\beta)\setminus\{0\}$ (wäre $r_k = 0$, so wäre $I = (r_{k-1})$ Hauptideal), und nach der Wahl von β muß $|N_{K/\mathbb{Q}}(r_k)| \geq |N_{K/\mathbb{Q}}(\beta)|$ sein. Also ist K in $x = \frac{\alpha}{\beta}$ nicht quasi-euklidisch und folglich $\frac{\alpha}{\beta} \in B_\infty$.

Damit kann man aus der Kenntnis von B_∞ bereits die Klassenzahl von K bestimmen: für D(10), D(15), D(26) usw. enthält $B_2 = B_\infty$ nur einen einzigen Punkt, also ist $h(K)|2$ in diesen Fällen. Andererseits ist hier $\varphi(B_\infty)$ nie die Hauptidealklasse, und wir können h=2 in diesen Fällen schließen.

Etwas interessanter ist D(35); hier enthält B_∞ drei verschiedene Punkte, und wir haben zuerst nur $h(K)|4$. Allerdings liegen die Ideale $5_1 = (\pm 2\sqrt{35}, 5)$ und $2_1 = (1+\sqrt{35}, 2)$ in derselben Idealklasse, sodaß sich auch hier h=2 ergibt.

Dies wirft die Frage auf, wann $\varphi(x) = \varphi(x')$ für zwei Punkte $x, x' \in K$ gilt. Dazu sei $SL_2(R)$ die Gruppe der 2×2-Matrizen mit Einträgen aus R und Determinante +1; $SL_2(R)$ operiert auf K mittels

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{a\alpha + b\beta}{c\alpha + d\beta}$$

(genaugenommen muß man K durch $K \cup \{\infty\}$ ersetzen, will man nicht von vornherein ausschließen, daß $c\alpha + d\beta = 0$ wird; schränkt man den Definitionsbereich von $SL_2(R)$ jedoch auf B_∞ ein, kann dies nie eintreten). Zwei Punkte $x = \alpha/\beta$ und $x' = \alpha'/\beta'$ heißen nun äquivalent ($x \equiv x'$), wenn es ein $A \in SL_2(R)$ gibt mit $A(x) = x'$. Damit gilt

(2.15) <u>Sei K ein algebraischer Zahlkörper mit unendlicher Einheitengruppe. Dann enthält B_∞ genau h-1 Äquivalenzklassen von Punkten.</u>

Dazu muß man erstens zeigen, daß $\varphi(x) = \varphi(x')$ genau dann gilt, wenn $x \equiv x'$ gilt, und daß zweitens B_∞ kein $x \in K$ enthält, sodaß $\varphi(x)$ die Hauptidealklasse ist. Das letztere Ergebnis scheint alles andere als elementar zu sein und wurde von Vaserstein (1972) bewiesen; es erscheint mir wünschenswert, dessen Beweis in die Sprache der algebraischen Zahlentheorie zu übersetzen. Beim Beweis der ersten Tatsache benutzt Cooke die folgende Beobachtung von Hurwitz (1895):

(2.16) <u>Die Ideale (α, β) und (α', β') sind genau dann gleich, wenn es ein $A \in SL_2(R)$ gibt mit</u> $A(\alpha/\beta) = A(\alpha'/\beta')$.

Der Beweis, den Cooke für (2.15) gibt, ist ein reiner Existenzbeweis und kann daher nicht zufriedenstellen. Der Originalbeweis von Hurwitz dagegen gibt einem zumindest einen Hinweis darauf, wie man A konstruieren kann, außerdem ist er einfacher als Cookes Beweis:

Bew. von (2.15): Sei $I = (\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$; ist h die Klassenzahl von K, so ist $I^h = (\eta)$ ein Hauptideal. Schreibt man nun $(\eta) = I^h = (\alpha, \beta) \cdot I^{h-1}$ und beachtet die Definition des Produktes von Idealen, so folgt die Existenz von $\gamma, \delta \in I^{h-1}$ mit $\eta = \alpha\gamma + \beta\delta$. Ganz entsprechend erhält man $\gamma', \delta' \in I^{h-1}$ mit $\eta = \alpha'\gamma' + \beta'\delta'$. Damit sind die Zahlen $a = (\alpha'\gamma + \beta\delta')/\eta$, $b = (\alpha'\delta - \alpha\delta')/\eta$, $c = (\beta'\gamma - \beta\gamma')/\eta$ und $d = (\alpha\gamma' + \beta'\delta)/\eta$ ganze Zahlen aus R mit ad-bc = 1, und es gilt
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$.

Für den Beweis von (2.15) brauchen wir noch ein weiteres Resultat von Hurwitz:

(2.17) <u>Sei</u> $I = (\alpha,\beta)$ <u>und</u> $I \sim J$. <u>Dann gibt es</u> $\alpha',\beta' \in R$ <u>mit</u> $J = (\alpha',\beta')$ <u>und</u> $\alpha/\beta = \alpha'/\beta'$.

Bew.: Sei $I \sim J$; dann gibt es $\gamma,\delta \in R$ mit $\gamma I = \delta J$. Damit sind $\alpha' = \alpha\gamma/\delta$ und $\beta' = \beta\gamma/\delta$ ganz, erfüllen $\alpha/\beta = \alpha'/\beta'$, und es ist $(\alpha',\beta')(\delta) = (\alpha\gamma,\beta\gamma) = I\cdot(\gamma) = J\cdot(\delta)$, also $J = (\alpha',\beta')$.

Jetzt können wir auch (2.15) beweisen:

Bew.: Sei $A \in SL_2(R)$ und $A(\alpha/\beta) = \alpha'/\beta'$. Dann gibt es ein $\eta \in K$ mit $\alpha'\eta = a\alpha + b\beta$, $\beta'\eta = c\alpha + d\beta$. Dies impliziert $(\alpha,\beta) = (\eta)(\alpha',\beta') \sim (\alpha',\beta')$, also $\varphi(\alpha/\beta) = (\alpha'/\beta')$. Sei nun umgekehrt $\varphi(\alpha/\beta) = (\alpha'/\beta')$; dann ist $(\alpha,\beta) \sim (\alpha',\beta')$, und nach (2.17) gibt es $\gamma,\delta \in R$ mit $(\gamma,\delta) = (\alpha',\beta')$ und $\gamma/\delta = \alpha/\beta$. Mit (2.16) erhalten wir ein $A \in SL_2(R)$ mit $A\binom{\gamma}{\delta} = \binom{\alpha'}{\beta'}$, und dasselbe A erfüllt dann auch $A\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha'}{\beta'}$.

Als Beispiel wollen wir zeigen, daß die Punkte $2\sqrt{35}/5$ und $(1+\sqrt{35})/2$ äquivalent sind. Dazu schreiben wir $(1+\sqrt{35})/2$ mit (2.16) in der Form $(1+\sqrt{35})/2 = \alpha'/\beta'$ mit $\alpha' = 20+3\sqrt{35}$ und $\beta' = 5+\sqrt{35}$; damit ist $(2\sqrt{35}, 5) \sim (\alpha',\beta')$. Da $D(35)$ Klassenzahl 2 hat und $(2\sqrt{35},5)^2 = (5)$ ist, können wir wie in (2.16) mit $\alpha = 2\sqrt{35}$ und $\beta = 5$ schreiben: $5 = \alpha\gamma + \beta\delta = \alpha'\gamma' + \beta'\delta'$ mit $\gamma,\delta,\gamma',\delta' \in (2\sqrt{35},5)$ für $\gamma = -\sqrt{35}$, $\delta = 15$, $\gamma' = \sqrt{35}$, $\delta' = -20$ und erhalten die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -41-4\sqrt{35} & 60+17\sqrt{35} \\ -7-2\sqrt{35} & 29+3\sqrt{35} \end{bmatrix},$$

die in der Tat unimodular ist und $A(\alpha/\beta) = \alpha'/\beta'$ erfüllt.

Mit Hilfe der oben definierten Abbildung $\varphi: K \mapsto Cl(K)$ läßt sich auch ein einfaches Kriterium für semi-euklidische Ringe angeben:

(2.18) <u>Ein Zahlring R ist genau dann semi-euklidisch, wenn für jedes</u> $x \in B_1$ <u>gilt:</u> $\varphi(x) \neq [(1)]$, <u>d.h. mit</u> $x = \alpha/\beta$ <u>ist</u> (α,β) <u>kein Hauptideal.</u>

Bew.: Sei $\varphi(x) \neq [(1)]$ für alle $x \in B_1$, und seien $\alpha,\beta \in R$ mit $(\alpha,\beta) = R$. OBdA dürfen wir $\alpha \bmod \beta$ so wählen, daß $\alpha/\beta \in F$ wird. Wegen $\varphi(x) = [(1)]$ für $x = \alpha/\beta$ liegt x nicht in B_1; dies bedeutet, daß es ein $y \in R$ mit $|N_{K/\mathbb{Q}}(x-y)| < 1$ gibt. Also ist R semi- euklidisch.
Sei andererseits R semi-euklidisch und $x = \alpha/\beta \in K$. Ist (α,β) ein Hauptideal (also $\varphi(x) = [(1)]$), so gibt es, weil R semi-euklidisch ist, ein $y \in R$ mit $|N_{K/\mathbb{Q}}(x-y)| < 1$. Also liegt x nicht in B_1.

Ein analoges Ergebnis erhält man für k-stufig semieuklidische Ringe, wenn man B_1 durch B_k ersetzt. So ist z.B. D(10) semi-euklidisch, weil $B_1 = \{\sqrt{10}/2\}$ und $(\sqrt{10},2)$ kein Hauptideal ist.

Anmerkungen zu § 2

Der Begriff "euklidisches Minimum" in Zahlkörpern ist in der mathematischen Literatur unbekannt; stattdessen wurde bisher der Ausdruck "inhomogenes Minimum der zugehörigen Normform" verwendet. Das erste Resultat über euklidische Minima stammt von Minkowski, der für reellquadratische Zahlkörper mit Diskriminante d gezeigt hat, daß $M(K) = M_1(K) \leq \sqrt{d}/4$ gilt. Minkowski hat weiter vermutet, daß für totalreelle Zahlkörper n-ten Grades die Ungleichung $M(K) \leq 2^{-n}\sqrt{d}$ gilt; dies konnte jedoch bisher nur in Spezialfällen (n = 2, 3, 4, 5; sh. dazu Remak (1923), Dyson (1948), Skubenko (1972)) bewiesen werden. Nach Tschebotarev gilt immerhin $M(K) \leq 2^{-n/2}\sqrt{d}$ (sh. dazu auch Hardy und Wright, S. 456-458). Für Zahlkörper beliebiger Signatur ist noch nicht einmal eine analoge Vermutung bekannt.

In der entgegengesetzten Richtung ist das Ergebnis von Davenport (1951) zu erwähnen, wonach für reell-quadratische Körper $M(K) \geq \sqrt{d}/128$ gilt. Am Ende dieser Arbeit bemerkt Davenport, daß Prasad die Konstante $\frac{1}{128}$ auf $\frac{1}{36}$ verbessert hat. Wie Ennola (1958) schreibt, hat Prasad in seiner Arbeit (vor deren Veröffentlichung) jedoch einen Fehler entdeckt. Die "Davenport-Konstante" $\sup M(K)/\sqrt{d} \geq \frac{1}{128}$ wurde dann von Cassels (1952) auf $\frac{1}{51}$ verbessert, und schließlich gelang es Ennola, $M(K) \geq \sqrt{d}/(16+6\sqrt{6}) \approx \sqrt{d}\,/30.69..$ zu zeigen; dies ist bis heute das beste Ergebnis geblieben.

Die explizite Bestimmung euklidischer Minima in reellquadratischen Zahlkörpern haben Heinhold (1939), Davenport (1947), Varnavides (1948, 1949), Bambah (1950, 1951) und Inkeri (1950) vorgenommen. Nach den grundlegenden Arbeiten von Barnes und Swinnerton-Dyer haben sich nur noch Godwin (1963, 1965) und Varnavides (1970a, 1970b) mit der Bestimmung euklidischer Minima in quadratischen Zahlkörpern befaßt. Die ersten Minima kubischer Zahlkörper hat Davenport (1947) berechnet; weitere Ergebnisse in dieser Richtung stammen von Prasad (1949), Clarke (1951), Samet (1954), Swinnerton-Dyer (1954), Godwin (1965), Smith (1969, 1971) und Taylor (1975, 1976) (sh. hierzu § 4).

Für Zahlkörper mit Körpergrad ≥ 4 sind bisher keine euklidischen Minima bestimmt worden; lediglich Cohn und Deutsch (1986) haben vermutet, daß für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ $M(K) = \frac{1}{2}$ und $M_2(K) = \frac{1}{4}$ gilt, während sie für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{2}})$ vermutet haben, daß $M(K) = \frac{1}{2}$ und $M_2(K) = \frac{7}{16}$ ist.