

## Abitur Türkei 2016

### Einleitung

Das türkische Abitur<sup>1</sup> in Mathematik ist eine Art Wettbewerb; in 75 Minuten müssen möglichst viele der 50 Fragen richtig beantwortet werden. Natürlich gibt es weder Taschenrechner noch Formelsammlung.

### Die Aufgaben

1. Vereinfache:

$$\frac{6^4 - 4^4}{5 \cdot 2^4}$$

- A) 9      B) 12      C) 13      D) 14      E) 16

2. Vereinfache:

$$\frac{4}{9 - \frac{49}{9}} - \frac{1}{8}$$

- A) 1      B) 2      C) 3      D)  $\frac{1}{2}$       E)  $\frac{1}{4}$

3. Vereinfache:

$$\frac{\sqrt{48}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{27}}}$$

- A) 3      B) 5      C) 8      D) 9      E) 12

4. Bestimme  $n$  aus der Gleichung

$$\frac{(n+1)! + (n-1)!}{n^3 - 1} = 24$$

- A) 3      B) 5      C) 6      D) 8      E) 9

<sup>1</sup>Lisans Yerleşirme Sinavi - 1. Siehe [https://en.wikipedia.org/wiki/Student\\_Selection\\_and\\_Placement\\_System](https://en.wikipedia.org/wiki/Student_Selection_and_Placement_System).

5. Der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen  $a$  und  $b$  ist ungerade, ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ist gerade. Welche der Zahlen

$$(I) \ ab, \quad (II) \ a+b, \quad (III) \ a^b$$

sind immer ungerade?

- A)  $I$       B)  $II$       C)  $III$       D)  $I$  und  $II$       E)  $II$  und  $III$
6. In einem Quadrat der Form  $10 \times 10$  sind die Zahlen von 1 bis 100 eingetragen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Felder mit geraden Zahlen werden gelb angemalt, Vielfache von 3 mit rot, und Vielfache von 5 mit blau. Ein Feld ist orange, wenn es genau mit rot und gelb angemalt ist.

Wie viele Felder sind orange?

- A) 8      B) 12      C) 13      D) 15      E) 18
7. Die Summe der Primfaktoren einer natürlichen Zahl  $A$  ist gleich derjenigen der Primfaktoren von  $12A$  vermindert um 3 und gleich derjenigen der Primfaktoren von  $70A$  vermindert um 5.

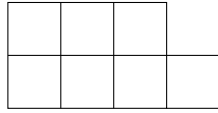
Was ist die Quersumme der kleinstmöglichen Zahl  $A$ ?

- A) 4      B) 5      C) 6      D) 7      E) 8
8. Seien  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen. Wenn  $a^2 - 2ab - 3b^2 = 0$  ist, was ist dann  $\frac{a+b}{a-b}$ ?
- A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) 6
9. Seien  $a$  und  $b$  ganze Zahlen mit  $16^a \cdot 9^a = 6^b \cdot 8^2$ . Bestimme  $a + b$ .

- A) 6      B) 9      C) 12      D) 15      E) 20

10. Seien  $x$  und  $y$  reelle Zahlen mit  $||x| + |y|| = |x + y|$ . Welche Ungleichung ist dann immer wahr?
- A)  $xy \geq 0$       B)  $xy \leq 0$       C)  $x + y \geq 0$   
 D)  $x + y \leq 0$       E)  $x - y \leq 0$
11. Sei  $A = \{(-1)^n \cdot n : n = 1, 2, \dots, k\}$ . Die Differenz zwischen größtem und kleinstem Element von  $A$  beträgt 25. Wie viele positive Elemente besitzt  $A$ ?
- A) 4      B) 6      C) 8      D) 10      E) 12
12. Seien  $a$  und  $b$  ganze Zahlen mit  $1 < a < b - a < 5$ . Was ist die Summe aller möglichen  $b$ ?
- A) 11      B) 14      C) 15      D) 16      E) 18
13. Von zwei Zahlen ist die kleinere gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Zahlen vermindert um 3; die große ist um 4 größer als das geometrische Mittel. Was ist die Summe der beiden Zahlen?
- A) 7      B) 9      C) 10      D) 12      E) 14
14. Welches ist der Rest von  $1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5$  bei Teilung durch 7?
- A) 4      B) 3      C) 2      D) 1      E) 0
15.  $f$  und  $g$  sind auf  $\mathbb{R}$  definierte Funktionen. Es ist  $(f + g)(x) = x^2$  und  $(f - g)(2x) = x$ . Bestimme  $f(4) \cdot g(4)$ .
- A) 45      B) 51      C) 54      D) 60      E) 63
16. Für  $x \in ]0; 3]$  ist  $f(x) = 2x + 1$  und für alle reellen Zahlen ist  $f(x) = f(x + 3)$ . Bestimme  $f(6) + f(7) + f(8)$ .
- A) 8      B) 12      C) 15      D) 18      E) 21
17. Sei  $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$  und  $K = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ . Welches Paar ist Element der Menge  $(K \setminus C) \times (\mathbb{N} \setminus K)$ ?
- A) (3; 2)      B) (9; 4)      C) (15; 1)      D) (16; 12)      E) (25; 8)

18. Wie viele Möglichkeiten gibt es, in der folgenden Figur vier Quadrate so schwarz zu färben, dass in jeder Reihe mindestens ein schwarzes Quadrat ist?



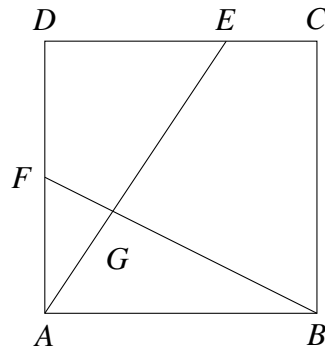
- A) 26      B) 28      C) 30      D) 32      E) 34
19. Drei Kanten eines Tetraeders werden zufällig gefärbt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es die Kanten desselben Dreiecks?
- A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{1}{4}$       D)  $\frac{1}{5}$       E)  $\frac{1}{6}$
20. Sei  $P(x) = (x+1)^2(x^2+1)^4$ . Was ist der Koeffizient von  $x^4$ ?
- A) 8      B) 10      C) 12      D) 14      E) 16
21. Sei  $P(x) = x^3 - mx + 1$ ; die Reste beim Teilen von  $P(x-1)$  durch  $x+1$  und von  $P(x+1)$  durch  $x-1$  sind gleich. Bestimme  $m$ .
- A) 2      B) 4      C) 6      D) -1      E) -8
22. Sei  $P$  ein normiertes Polynom vom Grad 3 (also  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ) mit  $P(1) = P(3) = P(5) = 7$ . Was ist  $P(0)$ ?
- A) -1      B) -4      C) -8      D) 4      E) 8
23. Sei  $a$  eine reelle Zahl mit  $ax^2 - 18x + 18 = 0$ . Eine der beiden Wurzeln ist das Doppelte der anderen. Wie groß ist  $a$ ?
- A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) 6
24. Es ist  $\cos(2x) = 3 \sin^4(x)$ . Bestimme  $\tan^2 x$ .
- A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{3}{2}$       C)  $\frac{4}{3}$       D)  $\frac{3}{4}$       E)  $\frac{4}{5}$
25. Sei  $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ . Welche der drei Zahlen

I.  $\sin x$ ,      II.  $\sin 2x$ ,      III.  $\sin 3x$

sind rational?

- A) I      B) III      C) I und II  
D) I und III      E) II und III

26. Gegeben ist das Quadrat ABCD. Hier ist  $\overline{BC} = 6$ ,  $\overline{DE} = 4$ ,  $\overline{AF} = 3$  und  $\angle FGE = x$ . Bestimme  $\cot x$ .



- A)  $-\frac{1}{4}$     B)  $-\frac{5}{4}$     C)  $-\frac{3}{8}$     D)  $-\frac{1}{8}$     E)  $-\frac{5}{8}$
27. Sei  $z$  eine komplexe Zahl mit  $iz + 1 = 2(1 - \bar{z})$ . Bestimme den Realteil von  $z$ .

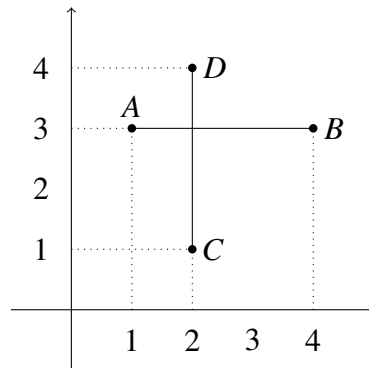
- A)  $\frac{1}{6}$     B)  $\frac{1}{4}$     C)  $\frac{1}{2}$     D)  $\frac{2}{3}$     E)  $\frac{5}{6}$

28. Berechne

$$(1+i)^4 \cdot \left(2 - \frac{2}{i}\right)^2.$$

- A)  $4i$     B)  $16$     C)  $-32i$     D)  $-8$     E)  $12$

29. In der komplexen Ebene ist folgende Figur gegeben.



Der Punkt  $z$  verläuft auf den Strecken AB oder CD. Welches ist dabei das Minimum und das Maximum von  $w = z \cdot \bar{z}$ ?

- A) 5;20    B) 5;25    C) 5;30    D) 10;20    E) 10;25

30. Sei  $t \in \mathbb{R}$  und  $x = e^{2\cos t}$ , sowie  $y = e^{3\sin t}$ . Welche der folgenden Beziehungen ist richtig?

- A)  $\ln^2 x + \ln^2 y = 4$       B)  $\ln^2 x + \ln^2 y = 9$   
 C)  $9\ln^2 x + 2\ln^2 y = 27$     D)  $\ln^2 x + 4\ln^2 y = 28$   
 E)  $9\ln^2 x + 4\ln^2 y = 36$

31. Berechne  $\log_2 \sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}$ .

- A)  $\frac{13}{8}$       B)  $\frac{15}{8}$       C)  $\frac{17}{8}$       D)  $\frac{23}{8}$       E)  $\frac{27}{8}$

32. Bestimme

$$\left( \sum_{k=1}^9 k \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^8 \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

- A) 27      B) 30      C) 32      D) 36      E) 40

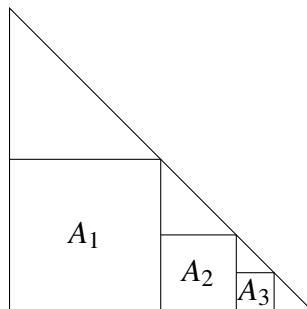
33. Gegeben ist eine geometrische Folge  $(a_n)$  mit

$$a_2 = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \frac{a_5 - a_1}{(a_3)^2 - (a_1)^2} = \frac{4}{9}.$$

Bestimme  $a_4$ .

- A)  $\frac{2}{3}$       B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{1}{6}$       D)  $\frac{27}{8}$       E)  $\frac{27}{4}$

34. Bestimme die Summe der Flächen der Quadrate  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , wenn das rechtwinklige und gleichschenklige Dreieck Katheten der Länge 4 besitzt:



- A)  $\frac{9}{2}$       B)  $\frac{11}{2}$       C)  $\frac{14}{3}$       D)  $\frac{16}{3}$       E)  $\frac{20}{3}$

35. Sei  $A$  eine  $2 \times 2$ -Matrix mit  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  und  $A \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 4 \end{pmatrix}$ . Bestimme  $a + b$ .

- A) 5      B) 7      C) 8      D) 9      E) 11

36. Seien  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix}$  zwei  $2 \times 2$ -Matrizen mit  $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ . Bestimme  $m$ .

- A)  $-3$     B)  $-1$     C)  $0$     D)  $2$     E)  $4$

37. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ 5x + 2x &= 3 \end{aligned}$$

schreibt sich in Matrixschreibweise so:  $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Es gilt weiter  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ; bestimme  $a+b$ .

- A)  $4$     B)  $6$     C)  $8$     D)  $10$     E)  $12$

38. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{x+2b} \cdot \cot x & \text{für } x \neq 0 \\ 2 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist stetig in  $x = 0$ . Bestimme  $\frac{a}{b}$ .

- A)  $1$     B)  $2$     C)  $4$     D)  $\frac{1}{3}$     E)  $\frac{1}{6}$

39. Der Graph der Funktion  $f(x) = \left| \frac{2x-1}{x-1} \right|$  schneidet deren waagrechte Asymptote in  $(a, b)$ . Bestimme  $a+b$ .

- A)  $\frac{5}{2}$     B)  $\frac{7}{2}$     C)  $\frac{8}{3}$     D)  $\frac{9}{4}$     E)  $\frac{11}{4}$

40. Berechne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}}{x}$$

- A)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$     B)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$     C)  $\frac{\sqrt{5}}{10}$     D)  $0$     E)  $2\sqrt{5}$

41. Es ist  $f(x) = e^x$  und  $g = f \circ f$ . Berechne  $g'(\ln 2)$ .

- A)  $e$     B)  $\ln 2$     C)  $2\ln 2$     D)  $e^2$     E)  $2e^2$

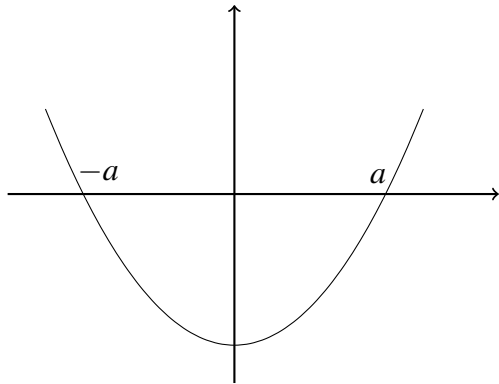
42. Seien  $a$  und  $b$  reelle Zahlen und  $y = ax^2 + bx$ . Die Tangente an die Parabel in  $(1|2)$  schneidet die  $y$ -Achse in  $(0|1)$ . Bestimme  $ab$ .

- A)  $-3$     B)  $-2$     C)  $-1$     D)  $2$     E)  $4$

43. In einem kartesischen Koordinatensystem werde eine Kurve durch die Gleichung  $y^2 + \sin(x^2 - 1) = 4$  beschrieben. Bestimme die Steigung der Tangente in  $P(-1 | -2)$ .

- A)  $-1$       B)  $\frac{1}{2}$       C)  $2$       D)  $-\frac{1}{2}$       E)  $1$

44. Eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte und differenzierbare Funktion hat als Ableitung  $f'$  die in der Abbildung gezeigte Parabelfunktion.



Welche der drei Behauptungen

- I.  $f(0) < 0$ .  
 II.  $f$  ist monoton fallend auf  $] -a; a[$ .  
 III.  $f(a)$  ist ein lokales Minimum.

sind für die Funktion  $f$  immer richtig?

- A) *II*                      B) *III*                      C) *I und II*  
 D) *II und III*            E) *I, II und III*

45. Gegeben ist ein Rechteck mit zwei Eckpunkten auf der  $x$ -Achse und zwei anderen Ecken auf der Parabel  $y = 27 - x^2$ . Bestimme den Umfang des Rechtecks mit maximaler Fläche.

- A)  $40$       B)  $42$       C)  $44$       D)  $46$       E)  $48$

46. Berechne

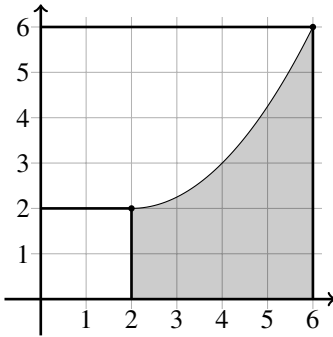
$$\int_4^9 \frac{3x-3}{\sqrt{x}+1} dx$$

- A)  $13$       B)  $18$       C)  $23$       D)  $28$       E)  $33$



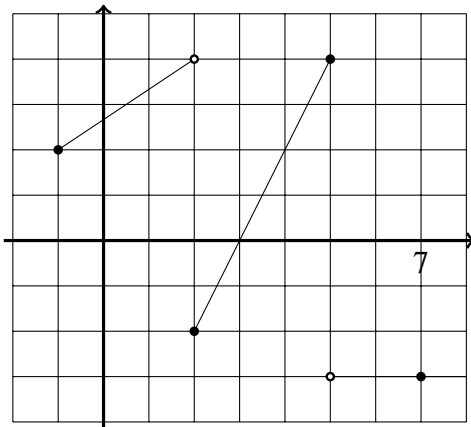
47. Gegeben ist das Schaubild einer auf  $[2;6]$  definierten bijektiven Funktion  $f$ ; die markierte Fläche hat Inhalt 13. Bestimme

$$\int_2^6 f^{-1}(x) dx.$$



- A) 18      B) 19      C) 20      D) 21      E) 22

48. Gegeben ist die stückweise definierte Funktion  $f$ .



Bestimme

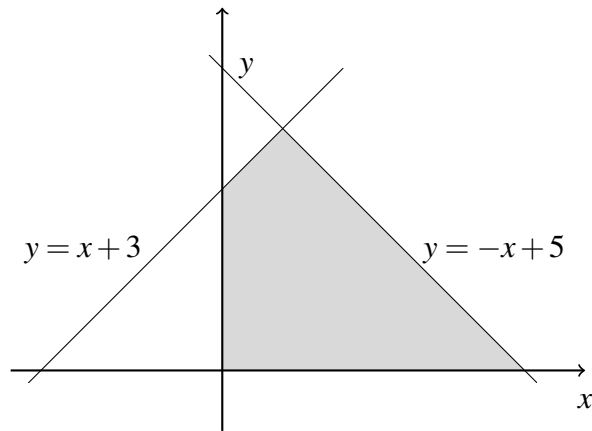
$$\int_{-1}^7 f(x) dx.$$

- A) 2      B) 4      C) 6      D) 8      E) 10

49. Sei  $k > 0$  reell. Die Fläche zwischen der Parabel  $y = x^2$  und der Geraden  $y = kx$  hat Inhalt  $\frac{9}{16}$ . Bestimme  $k$ .

- A)  $\frac{3}{2}$       B)  $\frac{4}{3}$       C)  $\frac{7}{4}$       D)  $\frac{7}{6}$       E)  $\frac{8}{5}$

50. Was ist das Volumen des Körpers, den man erhält, wenn die markierte Fläche um die  $y$ -Achse rotiert?



- A)  $37\pi$     B)  $38\pi$     C)  $40\pi$     D)  $41\pi$     E)  $42\pi$

### Lösungsschlüssel

1C, 2A, 3D, 4C, 5B, 6C, 7B, 8A, 9B, 10A, 11B, 12E, 13C, 14D, 15E, 16C, 17E, 18E, 19D, 20B, 21B, 22C, 23C, 24A, 25D, 26D, 27D, 28C, 29B, 30E, 31C, 32E, 33A, 34D, 35B, 36D, 37D, 38C, 39E, 40C, 41E, 42A, 43D, 44D, 45E, 46C, 47B, 48C, 49A, 50D.

Franz Lemmermeyer, Mörikeweg 1, 73489 Jagstzell  
hb3@uni-heidelberg.de