120 JAHRE HILBERTS ZAHLBERICHT

FRANZ LEMMERMEYER

Nach der Gründung der DMV im Jahre 1890 gab diese eine Reihe von Berichten über Teilgebiete der Mathematik in Auftrag, die im Laufe der Jahre in den Jahresberichten und später als Sonderbände erschienen. Beim Treffen der DMV 1893 in München wurden Hermann Minkowski und David Hilbert gebeten, einen solchen Bericht über die Zahlentheorie zu schreiben. Daraufhin einigten sie sich dahingehend, dass Minkowski über die elementare und Hilbert über die algebraische Zahlentheorie berichten solle. Minkowskis erste Versuche, die richtige Darstellung für die Theorie der Kettenbrüche und der quadratischen Formen zu finden, führten ihn schnell zur Entwicklung einer „Geometrie der Zahlen", die ihn bald so sehr in Anspruch nahm, dass er den eigentlichen Bericht nicht fertig stellen konnte und daher 1897 nur Hilberts Bericht erschien.

Die in den Jahresberichten veröffentlichten Berichte waren von sehr unterschiedlicher Qualität. Dass der Bericht Hilberts im eigentlichen Sinne des Wortes herausragend ist zeigt sich auch daran, dass dieser Bericht als einziger einen eigenen Namen bekommen hat: Vermutlich war es Rudolf Fueter, der in seiner Dissertation [16] unter Hilbert im Jahre 1903 den Namen „Zahlbericht" erstmals benutzt hat. Ein weiterer Hinweis auf die Ausnahmestellung von Hilberts Zahlbericht ist die Tatsache, dass die DMV diesem Bericht einen Artikel zum nicht einmal ganz runden 120ten Geburtstag widmet.

1. Von Gauss zu Hilbert

Gauß hatte in seinen Abhandlungen über biquadratische Rest in der ihm eigenen Klarheit die Arithmetik des Rings $\mathbb{Z}[i]$ entwickelt und mit Hilfe der Theorie der quadratischen Formen gezeigt, dass in diesem Ring die Zerlegung in Primelemente wie im Ring der ganzen Zahlen eindeutig ist. Auf dieser Grundlage formulierte er das biquadratische Reziprozitätsgesetz in diesen Zahlen, das später in Vorlesungen von Jacobi [28] und in verschiedenen Abhandlungen des jungen Eisenstein bewiesen wurde. Damit war das Ziel für weitere Untersuchungen vorgegeben, nämlich die Auffindung höherer Reziprozitätsgesetze und den dazu notwendigen Aufbau einer Arithmetik der Kreisteilungskörper.

Dieser Aufgabe gingen zuerst Dirichlet, Jacobi und Eisenstein nach. Ihnen war ebenso wie Gauß bewusst, dass die eindeutige Zerlegung in Primfaktoren im allgemeinen nicht gilt, und deswegen versuchten sie, die Arithmetik in solchen Zahlbereichen mit Hilfe der Theorie von Formen höheren Grades aufzubauen. Eisenstein behandelte auf diesem Weg die Theorie der zyklischen kubischen Zahlkörper, Dirichlet selbst gelangte bis zu den Klassenzahlformeln derjenigen Formen, die zu den Körpern der p-ten Einheitswurzeln gehören, überließ die Veröffentlichung dieser Resultate aber Kummer, dessen ideale Zahlen Dirichlet für die angemessenere Sprache gehalten haben mag. Für die weiteren Arbeiten über das Reziprozitätsgesetz der p-ten Potenzreste im Körper $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ der p-ten Einheitswurzeln waren diese idealen

Zahlen unerlässlich, und sie wurden auch von Eisenstein für dessen Beweis eines Spezialfalls verwendet, nämlich den des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes.

In einer Reihe von Arbeiten bewies Kummer mit Dirichlets analytischen Methoden die Klassenzahlformel und die Existenz gewisser Hilfsprimzahlen, die er zum Beweis der Reziprozitätsgesetze benötigte. Letztere konnte er nur für *reguläre* Primzahlen beweisen, also solche, für die die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ nicht durch p teilbar ist. Kronecker hat vermutet, dass sich diese Lücke schließen lässt mit Hilfe von unverzweigten abelschen Erweiterungen, auf die er in seinen Arbeiten über die komplexe Multiplikation gestoßen war. Dies wurde viel später durch Furtwängler bestätigt.

Da Kummer den Begriff einer ganzalgebraischen Zahl nicht zur Verfügung hatte, enthielt nicht nur seine Theorie der idealen Zahlen in Kreisteilungskörpern und ihren Teilkörpern eine Lücke; vielmehr verhinderte dieser Mangel auch den Aufbau einer vollständigen Theorie der idealen Zahlen in Kummererweiterungen $K(\sqrt[p]{\mu}\,)$ von $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, in denen die „natürliche“ Basis der Zahlen $\zeta^j \sqrt[p]{\mu}^k$ in der Regel keine Ganzheitsbasis bildet. Dieser Mangel erschwerte auch den Nachweis der Behauptung, die Theorie idealer Zahlen in quadratischen Körpern sei äquivalent zur Gaußschen Theorie der binären quadratischen Formen. Erst Dedekinds methodisches Vorgehen und die Einführung der Ideale erlaubten einen Aufbau einer Arithmetik in allgemeinen Zahlkörpern.

Dedekind schuf in den Supplementen zu den von ihm herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie [11] eine solide Grundlage der Kummerschen Theorie, fand aber nur wenige Leser. Bereits die Kummerschen Arbeiten über Reziprozitätsgesetze waren eher wohlwollend zur Kenntnis genommen als wirklich studiert worden. Das Hauptinteresse der mit Zahlentheorie vertrauten Mathematiker galt im ausgehenden 19. Jhdt. eher der Entwicklung der algebraischen Geometrie und der komplexen Multiplikation, also der Aufdeckung der Zusammenhänge zwischen Zahlentheorie einerseits und elliptischen und Abelschen Funktionen andererseits: Eine intensive Auseinandersetzung mit den Arbeiten Kummers und Dedekinds fand kaum statt. Dies änderte sich grundlegend mit dem Erscheinen des Zahlberichts.

2. Der Zahlbericht als Lehrbuch

Das erste Lehrbuch über Zahlentheorie wollte bereits Euler schreiben; dessen „Tractatus“ blieb aber unvollendet und wurde erst posthum veröffentlicht. Danach hat Legendre in seinem „Essai de Théorie des Nombres“ [32] versucht, seinen Lesern den damaligen Stand der Zahlentheorie nahezubringen; Legendres Buch ist sehr reich an Ideen, in der Durchführung aber manchmal weitläufig und, was schlimmer wiegt, wenig präzise. Auch Minkowski hat dies so empfunden, wie er in einem Brief an Hilbert vom März 1895 schreibt:

> *Diese ganze Woche habe ich Legendre und Gauß studiert. [. . .] Nur übermannt mich bei manchen Stellen von Legendre leicht Schläfrigkeit; welch himmelweiter Unterschied, wie Gauss und Legendre dieselben Dinge ansehen, dieselben Gedanken ordnen.*

Dennoch hat dieses Werk, wenn auch nicht ganz mit demselben Erfolg wie die sehr viel gelesene Geometrie Legendres, enorm zur Popularität der Zahlentheorie beigetragen.

Gauß legte wenige Jahre nach Legendre sein Jahrhundertwerk „Disquisitiones Arithmeticae“ vor, in dem er zwar dasselbe Feld bebaute wie Legendre (und zwar nicht aus Zufall: Dessen Abhandlung [31] aus dem Jahre 1785 hatte ihn zu Beginn seines Studiums in Göttingen zu vielen Untersuchungen inspiriert), aber mit ungleich mehr Erfolg: Gauß konnte das quadratische Reziprozitätsgesetz im Gegensatz zu Legendre vollständig beweisen, seine Komposition quadratischer Formen lieferte eine Gruppenstruktur auf den Äquivalenzklassen von Formen gegebener Diskriminante, während Legendres Komposition mehrdeutig war, und der Gaußsche Beweis des Dreiquadratesatzes kam ohne unbewiesene Annahmen aus, während Legendre unter anderem den später von Dirichlet bewiesenen Satz über Primzahlen in arithmetischer Progression benutzen musste. Dass Legendres Buch dennoch weit verbreitet war und auch mehrere Auflagen erlebte, lag an der für die damalige Zeit sehr kompakten Darstellung von Gauß, dessen Verlangen nach Allgemeinheit etwa seine Theorie der quadratischen Formen zu einem unüberwindbaren Hindernis für die meisten Leser machte.

Nur wenigen gelang es, die Disquisitiones in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts zu durchdringen: Neben Legendre, Dirichlet, Abel, Jacobi, Eisenstein und Kummer ist hier auch Sophie Germain zu nennen. Dirichlet und Jacobi, sowie – in bescheidenerem Umfang – Kummer sorgten in ihren Vorlesungen für eine Verbreitung der Gaußschen Ideen, aber erst mit den von Dedekind herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie lag ein Werk vor, welches das Eindringen in die Disquisitiones vorbereitete und, insbesondere in Sachen analytischer Hilfsmittel, über diese hinausging.

Dedekind hatte einen sehr modernen Aufbau als Supplement zu den populären Dirichletschen Vorlesungen über Zahlentheorie gegeben, aber die Reaktionen waren dürftig. Dedekind klärte die Bedeutung der ganzalgebraischen Zahlen auf, führte Ganzheitsbasen und Diskriminanten in beliebigen Zahlkörpern ein, bewies die eindeutige Primidealzerlegung in jedem solchen Ganzheitsring, und verallgemeinerte die Kummersche Klassenzahlformel von Kreiskörpern auf beliebige Zahlkörper. Die eigentlichen Ergebnisse Kummers, also die tiefer liegenden Teile der Arithmetik der Kreiskörper mit Anwendungen auf die Fermatsche Vermutung und die Reziprozitätsgesetze, blieben unübersetzt.

Offenbar empfand man von seiten der DMV das Bedürfnis, diese Lücke mit einem Bericht zu schließen. Für die Zahlentheorie bis Kummer existierte bereits der vorzügliche „Report“ [45] von Smith, der bis zu den ersten Arbeiten von Kummer und Kronecker vordringt. Für die elementare Zahlentheorie legte Dickson später drei Bände [14] vor, die allerdings ein ganz anderes Ziel verfolgten als die Berichte, die die DMV in Auftrag gab. Die Lücke, die Minkowskis fehlender Bericht gelassen hat, wurde durch die Lehrbuchreihe Paul Bachmanns [3, 4, 5, 6, 7, 8] über die ganze Bandbreite der damaligen Zahlentheorie wenn nicht geschlossen, dann doch deutlich verkleinert.

Wie sehr man den Mangel eines guten Überblicks auf dem Gebiet der algebraischen Zahlentheorie gespürt hat, ist eine offene Frage; jedenfalls schrieb Hilbert seinen Bericht wohl für ein Publikum, das es damals gar nicht gab – man kann vielmehr sagen, dass der Zahlbericht sich sein Publikum sozusagen selbst geschaffen hat. Die großen Zahlentheoretiker des ausgehenden 19. Jahrhunderts, also Kummer (1810–1893), Kronecker (1823–1891), Dedekind (1831–1916) und Weber (1842–1913), waren entweder bereits gestorben oder schon in die Jahre gekommen, und die mathematische Jugend sah sich eher von der algebraischen Geometrie und den Abelschen Funktionen angezogen als von der algebraischen Zahlentheorie. Zu den wenigen Ausnahmen gehören Paul Bachmann, Adolf Hurwitz und Kurt Hensel; der Beweis des Primzahlsatzes durch Jacques Hadamard und Charles-Jean de la Vallée-Poussin, aufbauend auf Ideen Bernahrd Riemanns, sorgten für Interesse an der analytischen Zahlentheorie, wo insbesondere die Namen Pafnuty Tschebyscheff, Franz Mertens und Edmund Landau zu nennen sind.

Hilbert hat mit seinem Zahlbericht die Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie in einem Maße gefördert, wie es sich Dedekind nicht hätte träumen lassen. Wie viele Mathematiker Dedekind mit seinen Supplementen für die Zahlentheorie gewonnen hat, ist schwer zu sagen (Bachmann gehört dazu), aber der Aufschwung der Zahlentheorie im 20. Jahrhundert hängt mit der Wirkung des Zahlberichts zusammen: So wie Dirichlet, Jacobi, Eisenstein und Kummer die Zahlentheorie aus den Disquisitiones Arithmeticae lernten (das ja ebenfalls in erster Linie kein Lehrbuch, sondern eher eine Monographie war), so lernte man algebraische Zahlentheorie im frühen 20. Jahrhundert aus dem Zahlbericht: Die Namen Furtwängler, Fueter, Herglotz, Takagi, Hecke, Artin, Hasse, Weyl, Siegel, Scholz und Chebotarev, um nur einige zu nennen, sprechen für sich.

Auf Anregung Hilberts hin schrieben Sommer [46] und Reid [41] Einführungen in die Theorie vor allem der quadratischen Zahlkörper; auch Bachmann legte mit [8] im Jahre 1905 ein von Hilbert inspiriertes Lehrbuch der algebraischen Zahlentheorie vor. Erst Hecke [17] betonte explizit die abstrakten gruppentheoretischen Strukturen, die Hilbert – wohl im Hinblick auf die Lesbarkeit seines Berichts – eher unterdrückt hatte. Dennoch: Dass all die späteren Werke leichter lesbar sind als Hilberts Zahlbericht liegt auch wesentlich daran, dass die jüngeren Bücher die Kummerschen Arbeiten links liegen lassen: Der Zahlbericht ist bis heute der einzige Schlüssel zu Kummers Werk geblieben.

3. Der Aufbau der Idealtheorie

Dedekind gehörte zu den ersten Mathematikern, die sich mit der neuen Galoistheorie vertraut machten; dabei bemerkte er, dass der wesentliche Begriff, der zu einer glatten Beschreibung der dabei verwendeten Methoden notwendig war, der eines Körpers und seiner Automorphismen ist. Dedekind begann nun systematisch, eine ganze Reihe von für viele seiner Zeitgenossen sehr abstrakten Begriffen einzuführen, etwa Ringe, Ordnungen, Moduln und Ideale.

Einen Teilring $\mathfrak{a}$ in $\mathcal{O}_K$ nennt Dedekind ein (ganzes) Ideal, wenn er bezüglich Multiplikation mit Elementen aus $\mathcal{O}_K$ abgeschlossen ist. Die Tatsache, dass Ideale genau die Kerne von Ringhomomorphismen sind (Kummers ideale Zahlen lassen sich als Ringhomomorphismen des Ganzheitsrings eines algebraischen Zahlkörpers in endliche Körper interpretieren; vgl. [34]), ist dafür verantwortlich, dass der Idealbegriff für die Algebra zu einem ganz wesentlichen Begriff geworden ist. Ein Ideal $\mathfrak{p}$ heißt prim, wenn aus $\alpha\beta \in \mathfrak{p}$ immer $\alpha \in \mathfrak{p}$ oder $\beta \in \mathfrak{p}$ folgt; für Zahlen läuft dies auf den Euklidischen Satz hinaus, dass die Zahl p genau dann prim ist, wenn aus $p \mid ab$ immer $p \mid a$ oder $p \mid b$ folgt.

Es war eine wesentliche Erkenntnis Dedekinds, dass zum Aufbau einer Idealtheorie einschließlich der eindeutigen Zerlegung in Primideale die Einführung des Begriffs der ganzen algebraischen Zahl notwendig war. In jedem algebraischen

Zahlkörper K konnte er damit den Ring $\mathcal{O}_K$ aller in K enthaltenen ganz algebraischen Zahlen auszeichnen. Der erste fundamentale Satz ist dann die Existenz einer Ganzheitsbasis: Hat K Grad n über $\mathbb{Q}$, dann gibt es Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{O}_K$ mit $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n$. Das wesentliche Hilfsmittel beim (einfachen) Beweis ist eine aus diesen Elementen gebildete Determinante, die Diskriminante des Zahlkörpers.

In jedem Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ gilt nun der Satz von der eindeutigen Zerlegung in Primideale, wonach sich jedes ganze Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ eindeutig als Produkt von Primidealen schreiben lässt. Die Crux beim Beweis dieses Satzes ist der Nachweis, dass aus der mengentheoretischen Relation $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{c}$ die Existenz eines ganzen Ideals $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ folgt. Daraus wiederum erhält man sofort, dass es zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ ein Ideal $\mathfrak{b}$ gibt, für das $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ein Hauptideal ist, und dieser Satz erlaubt das Zurückspielen von Teilbarkeitseigenschaften von Idealen auf Elemente.

Dedekinds Beweis für die Eindeutigkeit der Primidealzerlegung konnte Hilbert ebensowenig überzeugen wie derjenige, den Kronecker gegeben hatte. Blumenthal erzählt in Hilberts Gesammelten Abhandlungen [9, S. 397]:

> *Auf den Spaziergängen mit Hurwitz wurden Kroneckers und Dedekinds Arbeiten eingehend besprochen. Hilbert erzählte später drastisch: „Einer nahm den Kroneckerschen Beweis für die eindeutige Zerlegung in Primideale vor, der andere den Dedekindschen, und beide fanden wir scheußlich“.*

Wenig später veröffentlichen Hilbert und Hurwitz ihre eigenen Beweise für den Fundamentalsatz der Idealtheorie. In [25] benutzt Hurwitz den Prager Satz (vgl. [35]), den auch Dedekind bei seinen Untersuchungen der Idealtheorie zu Beginn benutzt hatte; in seiner Kritik des Hurwitzschen Beweises schreibt Dedekind in [12, S. 53]:

> *Aber dieser Weg entspricht durchaus nicht meinen Wünschen, teils weil die Benutzung der Funktionen von Variablen mir immer als ein der Sache fremdes Hilfsmittel erscheint, teils weil die Durchführung aller Beweise einen größeren Raum erfordert als in meiner damaligen Theorie.*

Diesen Grund der Methodenreinheit betont er wenig später noch einmal [12, S. 55]:

> *Aus denselben Gründen konnte der oben erwähnte Beweis des Satzes 3, welcher sich auf Satz 5 stützt, mich noch nicht völlig befriedigen, weil durch die Einmischung der Funktionen von Variablen die Reinheit der Theorie nach meiner Ansicht getrübt wird [. . .].*

Im selben Jahr veröffentlicht Hurwitz einen zweiten Beweis, dessen Grundidee auf Kroneckers Dissertation [30] zurückgeht: Durch ein geometrisches Argument, das dem euklidischen Algorithmus nachgebildet ist, wird gezeigt, dass die Klassenzahl h eines Zahlkörpers K endlich ist; aus algebraischen Gründen ist dann $\mathfrak{a}^h$ für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal, und dies genügt wie oben, um die eindeutige Zerlegung in Primideale zu beweisen. Diesen Beweis haben Ireland & Rosen in ihr Buch [29] aufgenommen. Hurwitz kam in [27] noch einmal auf seinen Beweis zurück; der Grundgedanke dieser Arbeit wurde von Lenstra [38] benutzt, um euklidische Zahlkörper mit großem Grad zu finden.

Hilbert beweist den Hauptsatz in [19] zuerst für Galoissche Erweiterungen, und in einem zweiten Schritt für beliebige Zahlkörper durch Herabsteigen aus dem normalen Abschluss.

In seinem Zahlbericht hat Hilbert den Kroneckerschen Beweis vorgestellt, der den Prager Satz als wesentliches Lemma benutzt und welcher der Dedekindschen Forderung nach Methodenreinheit nicht genügt. Ich persönlich erinnere mich daran, dass ich bei meinem ersten Studium des Zahlberichts über diesen Beweis gestolpert bin und mit den Kroneckerschen Argumenten wenig anfangen konnte. Heute habe ich für diesen Zugang deutlich mehr übrig und halte ihn, konsequent durchgeführt, für eine gangbare Alternative zum üblichen Aufbau.

Den Schlussakkord im Ringen um den richtigen Aufbau der Dedekindschen Idealtheorie setzte Emmy Noether [40], der es gelang, die eindeutige Primidealzerlegung axiomatisch zu charakterisieren und damit Zahl- und Funktionenkörper als gleichberechtigt zu behandeln. Es ist schwer, sich heute einen Eindruck davon zu machen, mit welcher Hochachtung die Algebraiker dieser Noetherschen Leistung damals gegenüber getreten sind.

In seiner Vorlesung [44, I, S. 9] schreibt F.K. Schmidt, der damals Zeitzeuge dieser Entwicklung gewesen ist:

> *Im ersten Teil der Einleitung haben wir in kurzen Zügen die rein zahlentheoretische Entwicklung der Zahlentheorie kennen gelernt. Sie wird weitgehend der Forderung nach Reinheit der Methode gerecht. Der Sinn dieser Forderung besteht darin, dass man eine mathematische Theorie mit Verfahren behandelt, die dem Gegenstandsbereich entnommen und ihm angemessen sind.*

Die Methodenreinheit führt F.K. Schmidt dann zu einem „einheitlichen Aufbau der Theorie der algebraischen Zahlen und der Theorie der algebraischen Funktionen“ mit Hilfe der Theorie der Bewertungen ganz im Sinne von Dedekind und Emmy Noether.

Auch Dedekind war sich natürlich der Tatsache bewusst, dass der Methodenreinheit Grenzen gesetzt sind; zum Beweis zentraler Sätze der algebraischen Zahlentheorie sind analytische Eigenschaften der Dedekindschen Zetafunktion unerlässlich. Hecke war ein Meister darin, diese Verbindung von analytischen und algebraischen Techniken auszunutzen, wie man unter Anderem an seinen Vorlesungen [17] und [18] sehen kann.

4. Die Arbeit am Zahlbericht

Als Minkowski und Hilbert 1893 den Auftrag zur Abfassung eines Berichts über die Zahlentheorie erhielten, war Minkowski bereits ein geachteter Mathematiker, dem zehn Jahre zuvor der Preis der Pariser Akademie für seine Arbeit über die Darstellung von Zahlen als Summen von fünf Quadraten zuerkannt worden war. Auf der 64. Naturforscher- und Ärzteversammlung in Halle hatte Minkowski 1891 über die Geometrie der Zahlen vorgetragen. Hilbert dagegen hatte sich bisher vor allem mit der Invariantentheorie beschäftigt, trug aber auf der DMV-Tagung 1893 in München über einen Beweis der Eindeutigkeit der Primidealzerlegung von Idealen in Zahlkörpern vor.

Hilberts zweite zahlentheoretische Arbeit entspringt demselben Gedankenkreis: Er entwickelt die „Grundzüge einer Theorie des Galoisschen Zahlkörpers“ und definiert die grundlegenden Begriffe der Zerlegungs-, Trägheits- und Verzweigungsgruppen. Diese Begriffe hat Hilbert dann in seinem Beweis des Satzes von Kronecker und Weber benutzt, wonach jede abelsche Erweiterung des rationalen Zahlkörpers ein

Kreiskörper ist, also in einem Körper von n-ten Einheitswurzeln enthalten ist. Vermutlich geht man etwas zu weit mit der Behauptung, Hilberts Beweis sei der erste vollständige Beweis dieses Satzes – in jedem Fall war es der erste durchsichtige Beweis. Darüberhinaus führte Hilbert mit der abelschen Durchkreuzung eine Technik ein, die später von Chebotarev für seinen Beweis des Dichtigkeitssatzes ausgebaut wurde; die Grundidee Chebotarevs wurde von Artin dann als der Schlüssel zum Beweis seines Reziprozitätsgesetzes erkannt.

Die große Bedeutung der Galoisschen Erweiterungen tritt bei Hilbert viel deutlicher hervor als bei seinen Vorgängern. Auch im Zahlbericht spielt die Operation der Galoisgruppe eine ganz wesentliche Rolle sowohl in der Theorie der ambigen Ideale, als auch im grundlegenden Satz 90 über Elemente der Norm 1 in zyklischen Erweiterungen. Bei Hilbert ist die Galoistheorie also nicht mehr eine Theorie der Polynome und ihrer Wurzeln, sondern von Anfang an eine Theorie der Körpererweiterungen. Ganz neu war diese Sichtweise nicht: Bereits im wenig beachteten Artikel [2] von Bachmann konnte man eine Darstellung der Galoistheorie finden, bei der nicht mehr die Polynome und ihre Wurzeln, sondern die von diesen Wurzeln erzeugten Körper (und zwar Dedekinds „Zahlenkörper“) im Mittelpunkt standen. In seiner großen Arbeit [47] hat Steinitz die Galoistheorie dann so überzeugend umgeschrieben (und zwar allgemein auch für Körper endlicher Charakteristik), dass danach kaum noch Lehrbücher der Algebra geschrieben wurden, die den ursprünglichen Zugang beibehielten.

Derartige Fortschritte in der Theorie haben ihren Preis: Nachfolgenden Generationen war es nur unter großen Anstrengungen möglich, die Originalarbeiten von Galois, Abel, Jacobi und Kronecker zu lesen, und es ist schwer zu sagen, wieviele Ideen in diesen Arbeiten heute noch begraben liegen.

Zwischen seinen Arbeiten über die Arithmetik Galoisscher Zahlkörper hat Hilbert 1894 einen weiteren zahlentheoretischen Artikel veröffentlicht, der weithin etwas unterschätzt wird, nämlich denjenigen „Über den Dirichletschen biquadratischen Zahlkörper“.

> *Die vorliegende Abhandlung hat das Ziel, die Theorie des Dirichletschen biquadratischen Körpers auf rein arithmetischem Wege bis zu demjenigen Standpunkt zu fördern, auf welchem sich die Theorie der quadratischen Körper bereits seit Gauß befindet. Es ist hierzu vor allem die Einführung des Geschlechtsbegriffs sowie eine Untersuchung derjenigen Einteilung aller Idealklassen notwendig, welche sich auf den Geschlechtsbegriff gründet.*

Hilbert gibt hier einen arithmetischen Beweis für die Klassenzahlformel von biquadratischen Erweiterungen $\mathbb{Q}(i, \sqrt{m}\,)$, welche Dirichlet seinerzeit mit analytischen Methoden in der Sprache der quadratischen Formen bewiesen hatte. Der Kern des Hilbertschen Zugangs liegt in seiner Behandlung des Begriffs der Geschlechter, die er mit Hilfe eines neuen Symbols beschreibt, das man als Prototyp des Normenrestsymbols auffassen kann, mit welchem es ihm später gelang, die Kummerschen Ergebnisse im Zahlbericht auf eine klare und strukturierte Art und Weise darzustellen.

5. Kritik am Zahlbericht

Die einzigen Stimmen, die sich kritisch zu Hilberts Zahlbericht äußerten, sind nur durch Olga Taussky bekannt geworden. So schreibt sie in ihren autobiographischen Skizzen [49, S. 20]:

> *Viele Jahre später hat Emmy gegen den Zahlbericht gewettert. [...] Emmy zitierte damals Artin, der gesagt habe, der Zahlbericht habe den wirklichen Fortschritt dieses Gebiets um Jahrzehnte verzögert.*

Es ist wohl so, dass man die Aussagen, die Taussky in ihrer autobiographischen Skizze macht, nicht auf die Goldwaage legen darf. Der ganze Artikel ist durchwebt mit Behauptungen, die bisweilen kaum einen historischen Kern besitzen. Von ihrem Doktoranden Hobby schreibt sie etwa:

> *Ein Student, Hobby, arbeitete über Gruppentheorie, und seine Dissertation führte zur Lösung des Klassenkörperturmproblems durch Golod und Shafarevich.*

Hobby hat in seiner Dissertation [24] gezeigt, dass es unendliche Türme von 2-Gruppen gibt, wie sie in einem Klassenkörperturm auftreten könnten, und dass daher die Möglichkeit unendlicher Klassenkörpertürme nicht aus trivialen gruppentheoretischen Gründen ausgeschlossen ist. Dies ist ein schönes Ergebnis (Serre hat es später verallgemeinert; vgl. [15]), hat aber mit der Lösung des Klassenkörperturmproblems durch Golod und Shafarevich nichts zu tun.

In [49, S. 19] schreibt Taussky außerdem, dass Hilberts Bericht „nicht frei von Fehlern jeder Größenordnung" sei. Auch diesen Vorwurf hat sie des öfteren wiederholt, ohne jedoch konkret zu werden; lediglich Hilberts Vermutung, dass der Hilbertsche Klassenkörper eines Zahlkörpers mit Klassenzahl 4 eine ungerade Klassenzahl besitze, hat sich im allgemeinen als falsch herausgestellt.

Ich glaube daher, dass die richtige Frage nicht lautet, was Emmy Noether und Emil Artin am Zahlbericht kritisieren wollten, sondern ob sie das, zumindest in dieser Form, überhaupt getan haben. Natürlich ist mit dem Erscheinen von van der Waerdens Algebra, die von den Vorlesungen von Noether und Artin geprägt war, deutlich geworden, dass die Hilbertsche Darstellung der algebraischen Zahlentheorie nicht mehr zeitgemäß war, und dass man andere Mittel wählen musste, um die algebraischen Strukturen hinter den Hilbertschen Beweisen (und vor allen Dingen jenen von Furtwängler und Takagi) deutlich sichtbar werden zu lassen. Aber weder Noether noch Artin hätten sich zu der Bemerkung hinreißen lassen, dass Hilbert das 1897 hätte vorhersehen müssen, oder dass es der Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie dienlich gewesen wäre, wenn er das getan hätte. Denkbar wäre allenfalls, dass ihre Bemerkungen andeuten sollten, Dedekind wäre mit seinem Zugang seiner Zeit um Jahrzehnte voraus gewesen.

In diese Richtung geht die Äußerung[1] von Hans Zassenhaus, der in [53, S. 19] schreibt:

> *Andererseits wurden die weiterreichenden Ansätze R. Dedekinds auf mehr als zwanzig Jahre in den Hintergrund gedrängt. Sie sind erst unter dem Einfluß E. Noethers sowie E. Artins, R. Brauers, H. Hasses, v.d. Waerdens, A.A. Alberts, Schurs und Frobenius' zur tragenden Basis der neueren Forschung geworden.*

[1] Ich danke Peter Ullrich für den Hinweis auf diese Stelle.

„That's not a bug, that's a feature", könnte man darauf antworten, denn Minkowski schrieb im März 1896 an Hilbert

> *Mir gefällt Dein Referat in seiner knappen und dabei doch vollständigen Form außerordentlich, und es wird sicher allgemein großen Beifall finden und die Kroneckerschen wie Dedekindschen Abhandlungen sehr in den Hintergrund drängen.*

Man sollte sich allerdings vor Augen halten, dass die von Zassenhaus aufgeführten Autoren die algebraische Zahlentheorie aus dem Hilbertschen Zahlbericht gelernt hatten; erst durch diesen Bericht sind ihnen die wesentlichen Ideen Dedekinds verständlich geworden.

Zassenhaus schweigt sich auch darüber aus, was er mit den weiterreichenden Ansätzen Dedekinds meint, aber die Auswahl der von ihm zitierten Namen legt eine Verbindung mit der Theorie der Algebren nahe. Auch diese Bemerkung scheint auf Olga Taussky zurückzugehen, die in [48, S. 499] vermutet, dass Fueter, Speiser und Schur die Behandlung des Stoffs in Dicksons Buch *Algebras and their arithmetic* bevorzugten. Auch diese Spekulation entbehrt in meinen Augen jeglicher Grundlage, denn wer Dicksons holprigen Stil der Klarheit und Präzision Hilberts vorzieht, kann entweder Dicksons Algebra oder Hilberts Zahlbericht nicht gelesen haben. Daneben gibt es kaum stoffliche Überschneidungen: Dicksons Buch befasst sich lediglich mit der Existenz von Ganzheitsbasen in Zahlkörpern, insbesondere in quadratischen.

Es ist auch kaum glaubhaft, dass Noether oder Artin wegen einiger weniger Seiten, etwa was den Beweis des Hauptsatzes der Dedekindschen Idealtheorie oder den sparsamen Gebrauch von Gruppentheorie angeht, den Stab über den ganzen Zahlbericht gebrochen haben könnten. In Artins Rede [1] zu Hilberts 100tem Geburtstag im Jahre 1962 ist von einer derartigen Kritik keine Spur zu hören:

> *So wurde denn der im Jahre 1897 im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung erschienene Zahlbericht Hilberts von allen Mathematikern mit großer Freude begrüßt. Hilbert stellt in ihm alle bis zur damaligen Zeit bekannten Ergebnisse zusammenfassend dar und machte durch große Vereinfachungen die Ergebnisse Kummers einem größeren Leserkreis zugänglich. Auch heute noch zieht jeder Zahlentheoretiker neben den neueren Lehrbüchern dieses grundlegende Werk zu Rate.*

Dass falsche Behauptungen wie diejenige Tausskys ein eigenes Leben haben bestätigt Gian-Carlo Rota in seinem Artikel [42] über „Ten lessons I wish I had been taught":

> *Als die Deutschen planten, Hilberts gesammelte Abhandlungen herauszugeben und sie ihm zu einem seiner späteren Geburtstage zu überreichen, stellten sie fest, dass sie die Arbeiten nicht originalgetreu abdrucken konnten, weil sie voller Fehler waren, darunter sehr ernste. Daraufhin stellten sie die junge arbeitslose Mathematikerin Olga Taussky-Todd ein, welche Hilberts Arbeiten durchgehen und alle Fehler verbessern sollte. Olga quälte sich drei Jahre lang ab; es stellte sich heraus, dass alle Fehler ohne größere Änderungen in den Formulierungen der Sätze korrigiert werden konnten. Eine Ausnahme gab es allerdings: eine Arbeit, die Hilbert in hohem Alter*

> *geschrieben hatte, konnte nicht repariert werden. Dort hatte Hilbert behauptet, einen Beweis der Kontinuumshypothese gegeben zu haben; man findet dies in einem Band der Mathematischen Annalen der frühen 1930er Jahre.*

Offenbar gibt es eine 11. Lektion, die man Rota nicht beigebracht hat, nämlich dass man derartige Behauptungen nach Möglichkeit zu verifizieren suchen sollte. Taussky wurde 1931 gebeten, an der Herausgabe der Hilbertschen Werke, vor allem an Band 1 über Zahlentheorie, mitzuarbeiten, damit diese Hilbert an seinem 70. Geburtstag 1932 übergeben werden konnten. Das waren offenbar drei schnelle Jahre, die Taussky zum Korrigieren der vielen Fehler brauchte. Hilberts „Beweis“ der Kontinuumshypothese ist das Programm, das er 1925 (und nicht in den frühen 1930er Jahren) in einem Vortrag [23] skizzierte. Bei Wikipedia [52] liest sich dieses Märchen so:

> *Seine Gesammelten Abhandlungen wurden mehrere Male veröffentlicht. Die Originalversionen seiner Arbeiten enthielten „viele technische Fehler aller Größenordnung“; als die Sammlung das erste Mal veröffentlicht wurde, wurden die Fehler verbessert und es stellte sich heraus, dass dies ohne größere Änderungen der Formulierungen der Sätze möglich war, mit einer Ausnahme – ein behaupteter Beweis der Kontinuumshypothese. Die Fehler waren dennoch so zahlreich und bedeutend, dass Olga Taussky-Todd drei Jahre brauchte, um alle Korrekturen anzubringen.*

Hier ist jede einzelne Aussage falsch. Es ist wohl an der Zeit, die “vielen Fehler”, die Taussky in Hilberts Bericht entdeckt haben will, offiziell zu beerdigen.

Auch eine auf den ersten Blick abfällige Bemerkung Hasses über den Zahlbericht in seinem Brief an Kurt Hensel vom April 1923 ist in meinen Augen eher eine augenzwinkernde Hommage an seinen Lehrer, den Schöpfer der p-adik, als ein Vorwurf in Richtung Hilbert. In diesem Brief geht es um Normenreste in relativ-zyklischen Erweiterungen, an der Hensel und Hasse gemeinsam arbeiteten. Hasse zitiert drei Sätze Takagis und schreibt zum Schluss:

> *Übrigens habe ich Herrn Tornier vorige Woche ein längeres Manuskript über die Theorie der Trägheits- und Verzweigungskörper mit Ihren Methoden entwickelt, gesandt, das Ihnen Herr Tornier wohl gerne mal zur Verfügung stellt. Sie finden darin die genaue Skizzierung der nur angedeuteten Sätze 1.) – 3.) über diese Körper und zwar aus dem „botokudischen“ Hilbertschen Zahlbericht ins „Deutsche“ übersetzt und mit Zusätzen versehen.*

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts hatten Johann Baptist von Spix und Carl Friedrich Philipp von Martius zwei Indiokinder von Brasilien nach München gebracht[2] und deren Sprache (das Botokudische, nicht das Bayrische) wurde bald zum Synonym für etwas vollkommen Unverständliches.

Im vorliegenden Fall spielt Hasse darauf an, dass Trägheits- und Verzweigungsgruppen lokale Größen sind, sich also bei der Komplettierung eines Zahlkörpers

[2]Auch in andern europäischen Ländern wurden Schwarze und Indianer zum „Völkerschauen“ ausgestellt; die beiden Kinder Juri und Miranha, die Spix und Martius zu diesem Zweck nach München gebracht hatten, starben 1821 und 1822 bereits im Alter von 14 Jahren. Mehr dazu findet man in der von Anne Dreesbach verfassten Dissertation *Gezähmte Wilde: Die Zurschaustellung „exotischer“ Menschen in Deutschland 1870–1940*, Campus-Verlag 2005.

nicht ändern und die folglich, ebenso wie die ohnehin lokale Theorie der Normenreste, mit Hilfe der von Hensel entwickelten Theorie der p-adischen Zahlen beschrieben werden können. Hasse war klar, dass man Hilbert nicht den Vorwurf machen konnte, dass er diese in seinem Zahlbericht nicht berücksichtigt habe: Hensel hatte mit seinen p-adischen Zahlen einen Hammer entdeckt und war seither auf der Suche nach geeigneten Nägeln. Erst Hasse hat aber solche gefunden und mit Hilfe des Lokal-Global-Prinzips (zuerst, wenig beachtet, für quadratische Formen, später mit wesentlich mehr Aufmerksamkeit in der Theorie der Algebren) sowie mit der Theorie der Normenreste (die später in die lokale Klassenkörpertheorie mündete) die p-adik aus einer Spielerei in ein unverzichtbares Hilfsmittel für die moderne Zahlentheorie verwandelt.

6. Die Geschlechtertheorie

Die Geschlechtertheorie spielte seit Gauß eine ganz wichtige Rolle in der algebraischen Zahlentheorie: Kummer benutzte die Geschlechtertheorie in Kummererweiterungen für seinen Beweis des Reziprozitätsgesetzes, Hilbert formulierte sie mit Hilfe seines Normenrestsymbols, Hecke [17] beschrieb Normenreste mit deutlich mehr Gruppentheorie als Hilbert, und die frühe Klassenkörpertheorie von Takagi bis Hasse benutzte die Theorie der Geschlechter als unverzichtbares Hilfsmittel (sh. [33]).

6.1. **Von Formencharakteren zu Normenresten.** Um zu verstehen, worin Hilberts Neuerung in der Theorie der Geschlechter besteht und warum sie für die weitere Entwicklung der Zahlentheorie wesentlich ist, schauen wir uns ein einfaches Beispiel an, nämlich die Formen der Diskriminante -15. Die Formenklassen werden repräsentiert von der Hauptform $Q_0(1,1,4) = x^2+xy+4y^2$ und von $Q_1(2,1,2)$. Die entsprechenden Idealklassen sind die Hauptidealklasse, sowie die Klasse des Ideals $(2, \frac{1+\sqrt{-15}}{2})$.

Ist p zur Diskriminante $d = -15$ teilerfrende Primzahl, die von der Hauptform dargestellt wird, so gilt

(1) $4p = (2x+y)^2 + 15y^2 \equiv (2x+y)^2 \bmod 3$,
(2) $4p = (2x+y)^2 + 15y^2 \equiv (2x+y)^2 \bmod 5$.

Für alle solchen Primzahlen gilt also $(\frac{-3}{p}) = (\frac{5}{p}) = +1$, wobei die Zähler der Legendresymbole von der Zerlegung der Diskriminante $15 = -3 \cdot 5$ in Primdiskriminanten herrühren.

Wird p dagegen von der Form $(2,1,2)$ dargestellt, ist also etwa $p = 2x^2+xy+2y^2$, dann gilt $8p = (4x+y)^2 + 15y^2$, und diesmal zeigt eine Reduktion modulo 3 und 5, dass wegen $(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{5}) = -1$ für alle solchen Primzahlen $(\frac{-3}{p}) = (\frac{5}{p}) = -1$ ist.

Die Ergebnisse von Gauß lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Satz 6.1. *Ist Δ eine beliebige Fundamentaldiskriminante mit Zerlegung $\Delta = \Delta_1 \cdots \Delta_t$ in Primdiskriminanten, dann definieren $\chi_j(Q) = (\frac{\Delta_j}{p})$, wo $p \nmid \Delta$ von der quadratischen Form Q mit Diskriminante Δ dargestellt wird, Charaktere auf der Formenklassengruppe. Dabei gilt für jede Form Q mit Diskriminante Δ die Produktformel*

$$\chi_1(Q) \cdots \chi_t(Q) = 1. \tag{1}$$

Genau dann gilt $\chi_1(Q) = \cdots = \chi_t(Q) = 1$ für eine Form Q, wenn die Formenklasse von Q ein Quadrat ist.

Auf Ideale übertragen wirkt die Sache noch rätselhafter; dass alle Primideale $\mathfrak{p}$ in der Hauptklasse den Beziehungen $(\frac{-3}{N\mathfrak{p}}) = (\frac{5}{N\mathfrak{p}}) = 1$ und diejenigen in der Nebenklasse $(\frac{-3}{N\mathfrak{p}}) = (\frac{5}{N\mathfrak{p}}) = -11$ genügen, zeigt man am einfachsten durch Übergang zu quadratischen Formen. Weiter gilt das Analogon von Satz 6.1 im reellquadratischen Fall nur dann, wenn man die Äquivalenz von Idealen im engeren Sinne betrachtet.

Eine direkte Übertragung dieser Konstruktion der Geschlechtercharaktere auf beliebige Zahlkörper scheitert an der fehlenden Zerlegung von Diskriminanten in Primdiskriminanten. Was man im allgemeinen zur Verfügung hat ist die Menge der verzweigten Primideale als schwacher Abglanz dieser Zerlegung, sowie die Normform. Im obigen Fall der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{-15}\,)$ gilt, dass die Normen $N\alpha$ für alle α, die durch kein verzweigtes Primideal teilbar sind, einem Quadrat modulo 3 und modulo 5 kongruent sind.

Dies legt nahe, für Primzahlen p die Abbildung

$$\nu_p : K_p^* \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \tag{2}$$

der Gruppe aller zu p teilerfremden Elemente von $K^\times$ in die prime Restklassengruppe zu betrachten. Man findet dann leicht:

Proposition 6.2. *Für ungerade Primzahlen p ist die durch (2) definierte Normabbildung ν_p surjektiv, falls p unverzweigt ist, und das Bild hat Index 2 in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, wenn p verzweigt ist.*

Für die Primzahl $p = 2$ funktioniert diese Idee nicht, weil die Gruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ trivial ist; stattdessen muss man hier die Restklassen modulo 4 (für Diskriminante $\Delta \equiv 4 \bmod 8$) bzw. modulo 8 (für Diskriminante $\Delta \equiv 0 \bmod 8$) betrachten, um ein analoges Ergebnis zu erhalten.

Hilbert führt nun ein neues Symbol $(\frac{a,b}{p})$ ein, das Normenrestsymbol. Dabei sind a und b beliebige rationale Zahlen $\neq 0$ und p eine Primzahl. Die Zahl a heißt dann ein Normenrest modulo p im quadratischen Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{b}\,)$, wenn es eine ganze algebraische Zahl $\alpha \in K^\times$ gibt, sodass a für jedes $m \geq 1$ kongruent einer Norm $N\alpha$ modulo p^m ist (hier darf α von m abhängen). Hilbert setzt dann

$$\Big(\frac{a,b}{p}\Big) = \begin{cases} +1 & \text{falls } a \text{ Normenrest modulo } p \text{ in } \mathbb{Q}(\sqrt{b}\,) \text{ ist,} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hilbert zeigt, dass dieses Symbol bimultiplikativ ist, dass also $(\frac{aa',b}{p}) = (\frac{a,b}{p})(\frac{a',b}{p})$ und $(\frac{a,bb'}{p}) = (\frac{a,b}{p})(\frac{a,b'}{p})$ gilt; weilter gilt $(\frac{a,b}{p}) = (\frac{b,a}{p})$. Daneben hat das Normenrestsymbol zwei tiefliegende Eigenschaften; eine davon ist der folgende

Satz 6.3. *Das quadratische Reziprozitätsgesetz ist äquivalent zur Produktformel*

$$\prod_p \Big(\frac{a,b}{p}\Big) = 1$$

für alle positiven Zahlen a und b.

Um die Produktformel auf ganze Zahlen mit beliebigem Vorzeichen zu übertragen führt Hilbert ein zusätzliches Symbol $(\frac{a,b}{-1})$ ein, das sich später als Hilbertsymbol an der unendlichen Primstelle von $\mathbb{Q}$ herausstellen wird.

Diese Formulierung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes ist nicht nur äußerst elegant, sondern sie erlaubt, das quadratische Reziprozitätsgesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper zumindest hinzuschreiben. Auf den Beweis dieser tiefliegenden Formel werden wir am Ende zurückkommen.

Die zweite tiefliegende Eigenschaft des Normenrestsymbols ist der folgende Satz 102 von Hilberts Bericht:

Satz 6.4. *Sind $a \neq 0$ und b ganze Zahlen und ist b keine Quadratzahl, dann ist a genau dann eine Norm einer Zahl des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{b}\,)$, wenn $(\frac{a,b}{p}) = 1$ für jede Primzahl p gilt.*

Um zu entscheiden, ob eine Zahl Norm aus einem quadratischen Zahlkörper ist, muss man daher nur nachprüfen, dass $(\frac{a,b}{p}) = 1$ für alle verzweigten Primzahlen p gilt; das geht aber in endlich vielen Schritten.

Der eigentliche Zweck der Einführung des Normenrestsymbols war aber die Beschreibung der Geschlechtercharaktere. Diese gelingt Hilbert wie folgt: ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal der Norm $N\mathfrak{a} = a$ im Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{b}\,)$, den wir der Einfachkeit halber als imaginärquadratisch annehmen wollen, und sind genau die Primzahlen $p_1, \ldots,$ p_t in K verzweigt, dann setzen wir

$$\chi_j(\mathfrak{a}) = \Big(\frac{a,b}{p_j}\Big)$$

und nennen

$$X(\mathfrak{a}) = (\chi_1(\mathfrak{a}), \ldots, \chi_t(\mathfrak{a}))$$

das Charakterensystem von $\mathfrak{a}$. Direkt aus der Definition des Normenrestsymbols und der Äquivalenz von Idealen folgt, dass das Charakterensystem $X(\mathfrak{a})$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ nur von seiner Idealklasse abhängt (Satz 99).

Diese Stelle ist ganz typisch für die Hilbertsche Darstellung der Materie im Vergleich zu der, die wir gewohnt sind: während Hilbert mit Charakterensystemen rechnet, die nur von der Idealklasse abhängen, würden es heutige Leser gerne sehen, dass man ihnen sagt, X induziere einen Homomorphismus $X : \mathrm{Cl}(K) \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^t$, oder noch besser, dass es eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow C_{\mathrm{gen}} \longrightarrow \mathrm{Cl}(K) \xrightarrow{\;X\;} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^t \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1 \tag{3}$$

gibt, welche die Hauptergebnisse Hilberts kompakt zusammenfasst.

Wir wollen uns ansehen, was dies im Falle $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-15}\,)$ bedeutet. Die beiden Idealklassen werden repräsentiert von $\mathfrak{o} = (1)$ und von $\mathfrak{z}_1 = (2, \frac{1+\sqrt{-15}}{2})$. Wegen $N(\mathfrak{o}) = 1$ ist $X(\mathfrak{o}) = (+1, +1)$. Um $X(\mathfrak{z})$ zu bestimmen, müssen wir die Hilbertschen Normenrestsymbole $(\frac{2,-15}{p})$ für $p = 3$ und $p = 5$ bestimmen. Nach Definition ist $(\frac{2,-15}{p}) = 1$ genau dann, wenn $2 \equiv x^2 + xy + 4y^2$ modulo allen Potenzen von p lösbar ist. Multiplikation mit 4 verwandelt diese Kongruenz in $8 \equiv (2x + y)^2 + 15y^2 \bmod 3^m$. Weil diese Kongruenz nicht einmal moduo $p = 3$ oder $p = 5$ lösbar ist, folgt $(\frac{2,-15}{3}) = (\frac{2,-15}{5}) = -1$ und damit $X(\mathfrak{z}_1) = (-1, -1)$.

Letztendlich laufen Hilberts Normenrestsymbole also auf die Gaußschen Geschlechtercharaktere hinaus. Der große und wesentliche Unterschied ist, dass sich Hilberts Konstruktion ohne großartige Änderungen auf beliebige Zahlkörper erweitern lässt.

Im Laufe der späteren Untersuchungen von Hensel und vor allem von Hasse hat sich dann herausgestellt, dass das Hilbertsche Normenrestsymbol $(\frac{a,b}{p})$ ein p-adisches Symbol ist, sich also problemlos für $a, b \in \mathbb{Q}_p$ definieren lässt. Die Produktformel ist dann das globale Band, das diese lokalen Symbole verbindet. Auch die eindeutige Primfaktorzerlegung lässt sich, wie Hasse gezeigt hat, also mit Hilfe einer Produktformel formulieren, und Artin und Whaples haben mit einer ähnlichen Produktformel die globalen Körper (Zahlkörper und Funktionenkörper über endlichen Konstantenkörpern) charakterisiert.

6.2. **Geschlechter bei Gauß.** Um die Kummersche Geschlechtertheorie erklären zu können, ohne ins Detail zu gehen, müssen wir uns einen Teil dessen ansehen, was Gauß gemacht hat. Dieser betrachtete binäre quadratische Formen $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, bei denen er allerdings B als gerade annahm. Bekanntlich ist die Theorie quadratischer Formen mit Diskriminante $\Delta = B^2 - 4AC$ äquivalent zur Idealtheorie in quadratischen Zahlringen mit Diskriminante Δ. Die Gaußsche Annahme, dass B gerade sein soll, läuft dann auf eine ausschließliche Betrachtung von Ordnungen hinaus, die in Ringen der Form $\mathbb{Z}[\sqrt{m}\,]$ enthalten sind.

Ist Δ eine Fundamentaldiskriminante, also die Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers, dann kann man Δ eindeutig als Produkt von Primdiskriminanten schreiben, also Diskriminanten, die durch keine zwei verschiedene Primzahlen teilbar sind. So ist $\Delta = -20 = -4 \cdot 5$ und $\Delta = 21 = (-3)(-7)$. Jede Form $Q = Ax^2 + Bxy + Cy^2 = (A, B, C)$ mit Diskriminante $\Delta = B^2 - 4AC$ stellt Primzahlen dar, die zu Δ teilerfremd sind. Ist nun etwa $Q(x, y) = p$, dann hängen die Werte der Legendresymbole $\chi_j(p) = (\Delta_j/p)$ nicht von der Wahl der Primzahl p ab, welche von Q dargestellt wird, sondern nur von (der Klasse von) Q, und sind damit Charaktere der Form Q selbst. Ist $\Delta = \Delta_1 \cdots \Delta_t$ die Zerlegung in Primdiskriminanten, dann gibt es also t Charaktere $\chi_j(p)$. Der Gaußsche Hauptsatz der Geschlechtertheorie besagt dann, dass ein Vektor $(\pm 1, \cdots, \pm 1)$ genau dann das Charaktersystem einer Form ist, wenn das Produkt der Einträge $+1$ ist, und dass jede Form, deren Charaktersystem $(+1, \ldots, +1)$ ist, eine Klasse erzeugt, die ein Quadrat ist.

Im Falle $m = -15$ gibt es also zwei Charaktere $\chi_1(p) = (\frac{-3}{p})$ und $\chi_2(p) = (\frac{5}{p})$; außerdem gibt es zwei Formenklassen, nämlich $Q_1 = (1, 1, 4) = x^2 + xy + 4y^2$, sowie $Q_2 = (2, 1, 2)$. Nun ist $Q_1(1, 2) = 19$ und $\chi(Q_1) = (\chi_1(Q_1), \chi_2(Q_1)) = ((\frac{-3}{19}), (\frac{5}{19})) = (+1, +1)$, sowie $Q_2(1, 1) = 5$ und $\chi(Q_2) = (-1, -1)$. Wir halten diese Informationen in folgender Tabelle fest:

Q	p	$\chi(Q)$
$(1, 1, 4)$	$19 = Q(1, 2)$	$(+1, +1)$
$(2, 1, 2)$	$5 = Q(1, 1)$	$(-1, -1)$

Die Klassengruppe der Formen mit Diskriminante $\Delta = -5 \cdot 2^2$ hat ebenfalls Ordnung 2; die Formen sind jetzt $Q_1(1, 0, 15)$ und $Q_2(3, 0, 5)$. Beide Formen stellen sowohl Primzahlen der Form $p \equiv 1 \bmod 4$ als auch solche der Form $p \equiv 3 \bmod 4$

dar, und wie im Falle $\Delta = -15$ gibt es genau zwei Charaktere:

Q	p	$\chi(Q)$
$(1,0,15)$	$19 = Q(2,1)$	$(+1,+1)$
$(3,0,5)$	$5 = Q(0,1)$	$(-1,-1)$

Für $\Delta = -15 \cdot 4^2$ ist dagegen die Klassenzahl 4, und die Klassengruppe vom Typ $(2,2)$. Die Klassen werden erzeugt von den Formen $Q_1 = (1,0,60)$, welche nur Primzahlen $p \equiv 1 \bmod 4$ darstellt, $Q_2 = (5,0,12)$, die ebenfalls nur $p \equiv 1 \bmod 4$ darstellt, und den beiden Formen $Q_3 = (4,0,15)$ und $Q_4 = (3,0,20)$, welche beide nur Primzahlen der Form $p \equiv 3 \bmod 4$ darstellen. Zu χ_1 und χ_2 kommt also jetzt der Charakter $\chi_3(p) = (\frac{-1}{p})$ hinzu, und die Verteilung auf die Geschlechter sieht wie folgt aus:

Q	p	$\chi(Q)$
$(1,0,60)$	$61 = Q(1,1)$	$(+1,+1,+1)$
$(4,0,15)$	$19 = Q(1,1)$	$(+1,+1,-1)$
$(5,0,12)$	$17 = Q(1,1)$	$(-1,-1,+1)$
$(3,0,20)$	$23 = Q(1,1)$	$(-1,-1,-1)$

Auch beim nächsten Schritt erhöht sich der 2-Rang der Klassengruppe, die für $\Delta = -15 \cdot 8^2$ den Typus $(2,2,2)$ hat. Die Hauptform $(1,0,240)$ stellt jetzt nur noch Primzahlen der Form $p \equiv 1 \bmod 8$ dar, was nahelegt, dass zu den drei bereits vorhandenen Charakteren jetzt der Charakter $\chi_4(p) = (\frac{2}{p}) = 1$ hinzukommt. Die Tabelle der Formen sieht daher nun so aus:

Q	p	$\chi(Q)$
$(1,0,240)$	$241 = Q(1,1)$	$(+1,+1,+1,+1)$
$(4,4,61)$	$61 = Q(0,1)$	$(+1,+1,+1,-1)$
$(15,0,16)$	$31 = Q(1,1)$	$(+1,+1,-1,+1)$
$(16,16,19)$	$19 = Q(0,1)$	$(+1,+1,-1,-1)$
$(17,14,17)$	$17 = Q(1,0)$	$(-1,-1,+1,+1)$
$(5,0,48)$	$53 = Q(1,1)$	$(-1,-1,+1,-1)$
$(12,12,23)$	$23 = Q(0,1)$	$(-1,-1,-1,+1)$
$(3,0,80)$	$83 = Q(1,1)$	$(-1,-1,-1,-1)$

Damit ist die Maximalanzahl der Charaktere erreicht: Für $\Delta = -15 \cdot 4^n$ mit $n \geq 4$ erhöht sich in jedem Schritt, in dem n um 1 erhöht wird, die 2-Klassenzahl, der Rang bleibt aber konstant; die Klassengruppen haben dann Typ $(4,2,2)$, $(8,2,2,)$ usw.

Weil Kummer die Geschlechtertheorie zum Beweis seines Reziprozitätsgesetzes verwendet hat, wollen wir auch kurz auf das Vorbild von Gauß eingehen. Anstatt den zweiten Gaußschen Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes wiederzugeben begnügen wir uns mit der folgenden Anwendung. Ist p eine Primzahl mit $(\frac{-15}{p}) = +1$, so wird p von einer Form der Diskriminante -15 (oder auch -60) dargestellt. Ist z.B. $(\frac{-3}{p}) = (\frac{5}{p}) = +1$, wird p von einer Form im Hauptgeschlecht dargestellt, d.h. es ist $p = x^2 + 15y^2$. Reduziert man diese Gleichung modulo 3 und modulo 5, folgt $(\frac{p}{3}) = (\frac{p}{5}) = +1$. Ganz analog folgt aus $(\frac{-3}{p}) = (\frac{5}{p}) = -1$, dass $p = 3x^2 + 5y^2$ und damit $(\frac{p}{3}) = (\frac{p}{5}) = -1$ ist. Insgesamt haben wir damit bewiesen, dass aus $(\frac{-15}{p}) = 1$ immer $(\frac{p}{15}) = 1$ folgt.

Dies sind natürlich nur Spezialfälle des quadratischen Reziprozitätsgesetzes; zur Herleitung des vollständigen Satzes muss man Formen anderer Diskriminanten betrachten.

6.3. **Geschlechter bei Kummer.**

6.4. **Geschlechter bei Hilbert.** Im Falle quadratischer Zahlkörper war die Definition der Geschlechter deswegen einfach, weil die entsprechenden Charaktere durch die Zerlegung der Fundamentaldiskriminante in Primdiskriminanten sehr leicht zu bekommen waren. Für beliebige Zahlkörper, selbst im Falle von Kummererweiterungen von Kreisteilungskörpern, existiert eine solche Zerlegung der Diskriminante nicht. Weil Diskriminanten das Produkt von verzweigten Primidealen sind, lag es nahe, sich diese verzweigten Primideale näher anzuschauen. Ist etwa $L = K(\sqrt[p]{\mu})$ eine solche Kummererweiterung von $K = \mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ und ist der Primteiler $\mathfrak{p}$ von $\mu \in \mathbb{Z}[\zeta_\ell]$ rein verzweigt in L/K, dann hat die Norm $N\alpha$ von zu $\mathfrak{p}$ primen Ekementen α die Eigenschaft, dass $N\alpha \equiv a^p \bmod \mathfrak{p}$ gilt, wobei $\alpha \equiv a \bmod \mathfrak{p}$ ist.

7. Der Zahlbericht als Schlüssel zu Kummer

Von vielen Zahlentheoretikern wurde ein Aspekt des Hilbertschen Zahlberichts wiederholt hervorgehoben: Hilbert hat die Kummerschen Ergebnisse durch seine klare Darlegung der Allgemeinheit zugänglich gemacht. André Weil praktiziert einmal mehr seine sehr eigene Sicht der Dinge, und schreibt über Hilberts Übersetzung der Kummerschen Ergebnisse im Vorwort zu Kummers *Collected Papers*:

> *Mehr als die Hälfte seines berühmten Zahlberichts, nämlich die Abschnitte IV und V, besteht in wenig mehr als der Darstellung von Kummers zahlentheoretischem Werk, mit unwesentlichen Verbesserungen.*

Diese Bemerkung sagt, wie schon Schappacher [43, S. 708] andeutet, mehr über Weil als über den Hilbertschen Bericht aus. Was Weil mit seiner Bemerkung wohl meint, erklärt er etwas später: Kummers zweiter Beweis des Reziprozitätsgesetzes läuft, so Weil, auf die Berechnung des Normenrestsymbols $(\frac{\mu, D}{(1-\alpha)})$ hinaus:

> *Angesichts dieser Tatsache fehlt nichts mehr zur Formulierung des Hilbertschen Reziprozitätsgesetzes außer der Sprache und einer klaren Wahrnehmung der Beziehung zwischen "lokalen" und "globalen" Fakten.*

Natürlich hat Weil leicht reden, denn wenn Hilbert die Kummerschen Rechnungen nicht in seine formal vollendete Produktformel übersetzt hätte, hätte Weil sie in Kummers Werk wohl kaum wiedererkannt: Erst durch die Hilbertsche Brille betrachtet bekommen Kummers Ergebnisse Struktur.

In der Tat erinnert Weils Aussage an eine andere, die er öfter in der ein oder anderen Form wiederholt hat. In seinem Artikel [51] nennt Weil einige Probleme, in denen unser Unwissen ziemlich vollständig sei, etwa wie die Automorphismen der Galoisgruppe auf der Idealklassengruppe operieren, die Theorie der Normenreste in nicht-zyklischen Erweiterungen, oder die Theorie der $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen, und schreibt dann:

> *Dies sind einige der Richtungen, über deren Verfolgung man nachdenken kann und soll, bevor man die Geheimnisse der nichtabelschen Erweiterungen betritt. Es ist durchaus möglich, dass wir dabei an Prinzipien von außerordentlicher Fruchtbarkeit gelangen, und dass sich uns, wenn der erste entscheidende Schritt auf diesem Weg erst einmal gemacht ist, der Zugang zu weiten Gebieten öffnet, deren Existenz wir kaum erahnen; denn bisher, wie weit unsere Verallgemeinerungen der Gaußschen Resultate auch sind, kann man nicht sagen, dass wir sie wirklich übertroffen haben.*

Dieser letzte Satz, schreibt Serre [10, S. 795], habe Serge Lang geschockt, während er selbst ihn berechtigt finde; Tate dagegen widerspricht Serre in seiner Antwort und nennt die Aussage bestenfalls dichterische Freiheit, eine Übertreibung, um einen Punkt deutlich zu machen, und schlimmstenfalls eine Widerspiegelung der unangenehmen Seite von Weils Charakter.

Eine ähnliche Aussage machte Weil auch in einem Brief [50] an seine Schwester Simone Weil, den er im März 1940 im Militärgefängnis von Rouen geschrieben hat: Er beschreibt, dass das quadratische Reziprozitätsgesetz nichts anderes sei als das Gesetz hinter den Koeffizienten der Artinschen L-Reihen. Letztere sind im abelschen Fall ganze Funktionen, während man im nichtabelschen Fall darüber nichts wisse:

> *es gibt hier, wie bereits Artin bemerkt hat, einen Angriffspunkt [...]: Weil die bekannten Mittel der Arithmetik anscheinend nicht ausreichen, um zu zeigen, dass die Artinschen L-Reihen ganze Funktionen sind, darf man hoffen, dass der Beweis dieser Aussage eine Bresche schlägt, die es uns erlaubt, dort einzutreten [...].*

Mit „dort“ meint Weil die Welt der nichtabelschen Reziprozitätsgesetze. Auch auf seine Idee des “unwesentlichen Fortschritts” wird bereits in diesem Brief angespielt:

> *[...] man kann sagen, dass alles, was in der Arithmetik seit Gauß bis in unsere Zeit gemacht worden ist, aus Variationen über das Reziprozitätsgesetz besteht: Man ist vom Gaußschen ausgegangen und gelangt, als Krönung aller Arbeiten von Kummer, Dedekind und Hilbert, zu demjenigen von Artin, und es ist dasselbe.*

Kummers Arbeiten über die höheren Reziprozitätsgesetze wurden (jedenfalls bis Vandiver in den 1920er Jahren begann, diese aufmerksam durchzuarbeiten) eher bewundert als studiert, und seinen Arbeiten über die Fermatsche Vermutung ging es nicht wesentlich besser. Ein kurzer Blick in den ersten Band von Kummers gesammelten Werken macht schnell deutlich, welche Opfer man bringen musste, um sich die Kummerschen Ideen zu eigen zu machen. Der einzige Mathematiker von Weltformat, der in der Kummerschen Welt zu Hause war, war Kummers Schüler Kronecker, der, um es vorsichtig auszudrücken, nicht gerade für eine meisterhafte Darstellung seiner eigenen tiefen Ideen bekannt war.

Worin bestehen nun die „unwesentlichen Verbesserungen“ Hilberts? Kummer hatte schon früh bemerkt, dass die Theorie der Gaußschen Summen nicht ausreichen würde, um sein Reziprozitätsgesetz der p-ten Potenzreste zu beweisen. Er hat aus diesem Grund den zweiten Gaußschen Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes als Grundlage seiner Untersuchungen gewählt, also eine Theorie der Geschlechter in Körpern der Form $K = K(\sqrt[p]{\mu}\,)$ über $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ aufgebaut; für ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ beschreibt das p-te Restsymbol $(\frac{\mu}{\mathfrak{p}})$ ja das Zerlegungsverhalten in L/K.

Kummers Problem bestand nun erst einmal darin, dass es ihm nicht gelang, eine ordentliche Theorie der idealen Zahlen in L aufzubauen, was wenig verwunderlich ist, da er den Begriff der ganzen algebraischen Zahl nicht besaß. Er konnte daher nur mit idealen Zahlen in Ordnungen arbeiten, was notwendig zum Ausschluss der verzweigten Stellen führte. Dies macht man sich leicht am Beispiel quadratischer Zahlkörper klar. So zeigt etwa die Gleichung $(1 + \sqrt{-3}\,)(1 - \sqrt{-3}\,) = 2 \cdot 2$ in der Ordnung $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ nicht nur, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ kein ZPE-Ring ist, vielmehr ist sie auch dafür verantwortlich, dass das Ideal $I = (2, 1 + \sqrt{-3}\,)$ in dieser Ordnung der Gleichung $I^2 = 2I$ genügt, während doch $I \neq (2)$ ist. Die Kürzungsregel für Ideale wird also falsch, was Kummer dazu zwang, die idealen Primteiler von $p\mu$ aus seinen Betrachtungen auszuschließen.

Auch Arnold Meyer, der in seinem Artikel [39] aus dem Jahre 1870 die Theorie der Formen über dem Ring $\mathbb{Z}[\omega]$ mit Hilfe idealer Zahlen studiert, muss mangels des Begriffs der ganz-algebraischen Zahl gewisse ideale Zahlen aus seiner Theorie ausschließen:

> *Von idealen Primfaktoren der Zahlen s und t, sowie der Zahl 3 sehe ich ab, da die Einführung solcher für das folgende keinen Vorteil gewährt. Wenn daher im folgenden von idealen Zahlen die Rede ist, so sind damit immer solche gemeint, deren Normen zu $3D$ prim sind.*

Kummer wird dadurch in seinem ersten Beweis des Reziprozitätsgesetzes gezwungen, zwei verschiedene Ordnungen zu betrachten; einmal arbeitete er in den „complexen Zahlen in w“, also in der Ordnung $\mathcal{O}_K[w]$, wo $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta]$ und $w^p = \mu \in \mathbb{Z}[\zeta]$ ist, zum andern musste er zur glatten Formulierung seiner Geschlechtertheorie eine weitere Ordnung einführen, nämlich die Unterordnung der „complexen Zahlen in z“, die aus Kombinationen von Konjugierten der Zahl

$$z_0 = (1 - \zeta)(1 + w + w^2 + \ldots + w^{p-1})$$

besteht.

Hilbert beginnt seine Ausführungen über die Kummerschen Körper damit, die ganzen Elemente in $L = K(\sqrt[p]{\mu}\,)$ zu charakterisieren, die Diskriminante von L zu bestimmen und die Primidealzerlegung in L/K anzugeben.

Bereits in seiner Arbeit über die Ergänzungsgesetze zum Reziprozitätsgesetz hat Kummer verschiedene Techniken eingeführt, die er zur Definition der Geschlechtercharaktere benötigte. Um den Hintergrund besser zu verstehen, werden wir einige

Ideen der Klassenkörpertheorie benötigen. Der einfachste Ergänzungssatz betrifft den quadratischen Charakter von -1: Bereits Fermat und Euler kannten den Inhalt der Aussage $(\frac{-1}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, die besagt, dass -1 quadratischer Rest modulo der Primzahlen $p = 4n+1$ ist, und quadratischer Nichtrest der anderen. In der Eulerschen Formulierung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes (die große Vorzüge gegenüber der Legendreschen besitzt) ist diese Aussage Teil des eigentlichen Reziprozitätsgesetzes, wonach das Restsymbol $(\frac{a}{p})$ nur von der Restklasse von p modulo $4a$ abhängt. Genauer definiert a eine quadratische Erweiterung $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a}\,)$ mit Diskriminante, und $(\frac{a}{p})$ hängt nur von der Restklasse von p modulo $|\Delta|$ ab, wo Δ die Diskriminante von K bezeichnet.

In dieser Form überträgt sich das Reziprozitätsgesetz problemlos auf höhere Potenzen. Im Kummerschen Fall hängt also das Restsymbol $(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}})$ für p-te Potenzen, wo ε eine Einheit und $\mathfrak{p} \nmid p$ ein Primideal in $k = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ bezeichnet, nur von der „Restklasse" von $\mathfrak{p}$ modulo $\mathfrak{d}$ ab, wobei $\mathfrak{b} = \operatorname{disc}(K/k)$ die Relativdiskriminante (hier reicht schon der Führer dieser Erweiterung) von $K = k(\sqrt[p]{\varepsilon}\,)$ bezeichnet und wo $\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{q} \bmod \mathfrak{d}$ ist, wenn $\mathfrak{p}\mathfrak{q}^{-1} = (\alpha)$ ein Hauptideal mit $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{d}$ ist. Die Relativdikriminante (wie auch der Führer) dieser Erweiterung K/k hängt nun sehr stark von der Restklasse von ε modulo den Potenzen des Primideals $(1-\zeta_p)$ ab. Zur Beschreibung dieser Restklassen führt Kummer seine logarithmischen Ableitungen ein, auf die wir nun genauer einzugehen haben.

Hilbert in einem Brief an Klein:

> *Die härtesten Nüsse sind die Kummerschen Arbeiten, und es bedarf einer vollständigen Umarbeitung derselben, um dieselben genießbar zu machen. Ich habe nicht geglaubt, daß Kummer ein so verzwickter Rechner sei. Der Hauptübelstand ist der, daß er von vornherein nur ein einziges Ziel nämlich den Beweis der allgemeinen Reciprocitätsgesetze anstrebt, wobei ihm alle Mittel recht sind, und die schönsten daneben liegenden Dinge unbeachtet bleiben.*

Minkowski:

> *Wenn ich außerdem die Resultate mancher bisher kaum genießbarer Arbeiten menschlichem Verständnisse näher bringe, so ist dergleichen ja wohl der eigentliche Zweck solcher Referate, für mich schließlich eine ganz angenehme Arbeit, aber doch nicht eine solche, die ich am höchsten schätze.*

8. Der Inhalt

Hilbert unterteilt seinen Bericht in fünf Teile. Der erste Teil ist dabei im wesentlichen eine Zusammenfassung der Dedekindschen Idealtheorie mit Einsprengseln von Kronecker. Das einzig wesentlich neue ist Hilberts Betonung der Relativkörper, also das Studium von Erweiterungen von Zahlkörpern. Dies ist der Rahmen, in welchem Hilbert die Kummersche Theorie der Kummererweiterungen $K(\sqrt[p]{\mu}\,)/K$ des Kreisteilungskörpers $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ betrachtet. Erst dieser Blickwinkel hat seine Vision der Hilbertschen Klassenkörper, zuerst im Spezialfall der relativquadratischen Erweiterungen, als abelsche Erweiterungen mit Relativdiskriminante (1) ermöglicht. Der zweite Teil des Zahlberichts baut ebenfalls darauf auf und bringt die Theorie der Galoiserweiterungen, also eine Darstellung der Hilbertschen Ergebnisse über Zerlegungs-, Trägheits und Verzweigungsgruppen. Hilbert stellt als wesentliches Hilfsmittel für den analytischen Teil der Beweise des Reziprozitätsgesetzes den Kroneckerschen Dichtesatz bereit, wonach die Primideale, die in einer normalen Erweiterung L/K voll zerfallen, die Dichte $1/(L:K)$ besitzen. Ein Hilfssatz, der in einem Spezialfall bereits bei Kummer auftaucht, erhebt Hilbert in den Rang eines Satzes; in ihren Arbeiten über die Klassenkörpertheorie zitieren Furtwängler und Takagi diesen Satz so oft, dass er schließlich als „Hilberts Satz 90“ bekannt wird. Auch die Tatsache, dass die Idealklassengruppe eines Zahlkörpers von Primidealen ersten Grades erzeugt wird, geht im Spezialfall von Kreisteilungskörpern auf Kummer zurück.

Der dritte Teil über quadratische Zahlkörper ordnet den großen Abschnitt V der Gaußschen Disquisitiones, nämlich die Theorie der binären quadratischen Formen, in die algebraische Zahlentheorie ein. Der neue Gesichtspunkt ist die zentrale Stellung der Geschlechtertheorie, zu deren Beschreibung Hilbert hier sein Normenrestsymbol einführt, mit welchem er später den Kummerschen Arbeiten Struktur gibt.

Die letzten beiden Teile des Zahlberichts gehen im wesentlichen komplett auf Kummer zurück. Der Abschnitt über Kreiskörper bringt außerdem Eisensteins Reziprozitätsgesetz als Vorstufe und wesentliches Hilfsmittel zum Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, sowie die Primidealzerlegung Gaußscher Summen (Hilbert nennt sie nach ihrem Ursprung Lagrangesche Resolventen) und den Satz von Kronecker und Weber, wonach jede abelsche Erweiterung des rationalen Zahlkörpers in einem Kreisteilungskörper enthalten ist.

9. Der Zahlbericht als Wegweiser

Der Zahlbericht ebnete den Weg für weitere Forschungen, insbesondere für Hilberts eigene Arbeiten über relativ-quadratische und relativ-abelsche Zahlkörper. Furtwängler setzte Hilberts Programm des Studiums unverzweigter abelscher Erweiterungen um, und Takagi gelang die Einbindung verzweigter Erweiterungen.

Der Weg zur Klassenkörpertheorie war mit einer ganzen Reihe von Problemen gepflastert, die erkannt und dann gelöst werden mussten. Hilberts Weg führte über die Reziprozitätsgesetze: Seine Formulierung des Kummerschen Reziprozitätsgesetzes als Produktformel des Normenrestsymbols erlaubte ihm die Frage, wie man ein allgemeines Reziprozitätsgesetz in beliebigen Zahlkörpern (welche die dazu notwendigen Einheitswurzeln enthielten) formulieren und beweisen könne. Im von Hilbert zuerst betrachteten quadratischen Fall erwies es sich als notwendig, den Begriff eines primären Primideals zu klären und als ersten Schritt den „ersten Ergänzungssatz“ zu beweisen. Bereits in diesem Spezialfall des quadratischen Reziprozitätsgesetzes wurde die Rolle, welche unverzweigte quadratische Erweiterungen für die allgemeine

Teil	Nr.	Stichworte
1		Algebraische Zahlkörper
	1	Norm, Spur, Differente, Diskriminante, Ganzheitsbasis
	2	Eindeutige Zerlegung in Primideale; Zerlegbare Formen
	3	Restklassenringe, kleiner Fermatscher Satz
	4	Zerlegung der Ideale, Diskriminantenteiler, Verzweigung
	5	Relativerweiterungen; Transitivität der Differente
	6	Dirichlets Einheitensatz
	7	Endlichkeit der Klassenzahl; Dedekindsche ζ-Funktion
	8	Zerlegbare Formen; Formenklassen
	9	Ordnungen; Ringklassengruppe; Einheiten in Ordnungen
2		Galoiserweiterungen
	10	Zerlegungs-, Trägheits und Verzweigungsgruppen
	11	Differente und Diskriminante in Galoiserweiterungen
	12	Kroneckers Dichtesatz
	13	Komposita von Zahlkörpern
	14	Primideale ersten Grades erzeugen Idealklassengruppe
	15	Relativzyklische Erweiterungen von Primzahlgrad; Satz 90
3		Quadratische Zahlkörper
	16	Zerlegungsgesetz; Pellsche Gleichung
	17	Geschlechtertheorie
	18	Hauptgeschlechtssatz; ambige Klassenzahlformel
	19	Klassenzahlformel; biquadratische Zahlkörper
	20	Korrespondenz Moduln und quadratischen Formen
4		Kreiskörper
	21	Zerlegungsgesetz
	22	Ganzheitsbasen, Diskriminante
	23	Satz von Kronecker-Weber
	24	Primidealzerlegung Gaußscher Summen
	25	Eisensteins Reziprozitätsgesetz
	26	Klassenzahlformel; Kreiseinheiten
	27	Anwendung auf das quadratische Reziprozitätsgesetz
5		Kummererweiterungen
	28	Zerlegungsgesetz
	29	Normenreste
	30	Primideale mit vorgeschriebenem Restcharakter
	31	Teilbarkeit der Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ durch p
	32	Ambige Klassenzahlformel
	33	Reziprozitätsgesetz für reguläre Primzahlen
	34	Geschlechtertheorie
	35	Zweiter Beweis des Reziprozitätsgesetzes
	36	Die Fermatgleichung

TABELLE 1. Der Inhalt von Hilberts Zahlbericht

Theorie spielen sollten, deutlich: Hilbert musste zuerst annehmen, dass die Klassenzahl des Grundkörpers ungerade ist und dann beweisen, dass in diesem Fall keine solchen unverzweigten quadratischen Erweiterungen existeren. Nachdem ihm für solche Grundkörper der Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes gelungen war, bewies er dieses für Grundkörper mit Klassenzahl 2 auf dem folgenden Weg:

(1) Es gibt genau eine unverzweigte quadratische Erweiterung K/k.
(2) Diese Erweiterung ist „Klassenkörpers“ in dem Sinne, dass genau die Primideale in der Hauptidealklasse in K/k zerlegt sind.
(3) Die Klassenzahl dieses Klassenkörpers K ist ungerade.
(4) Das quadratische Reziprozitätsgesetz in k folgt aus demjenigen in K.

Seine Vermutung, dass dieser Weg im allgemeinen gangbar ist, führte Hilbert auf seine einzige falsche Vermutung über die Theorie des Klassenkörpers; wie dramatisch er dabei daneben lag hat erst der Nachweis unendlich großer Klassenkörpertürme durch Golod und Shafarevich gezeigt.

Abgesehen von den zur Umschiffung dieser Klippe notwendigen Schritten gehen die meisten Beweisideen in den Arbeiten von Furtwängler und Takagi auf Hilbert zurück, was deren Leistungen aber keineswegs schmälern soll.

Literatur

[1] E. Artin, *Hilbert Rede* Colllected Papers
[2] P. Bachmann, *Ueber Galois' Theorie der algebraischen Gleichungen*, Math. Ann. **18** (1881), 449–468
[3] P. Bachmann, *Elemente der Zahlentheorie*, Leipzig 1892
[4] P. Bachmann, *Zahlentheorie, II. Teil. Die analytische Zahlentheorie*, Leipzig 1894
[5] P. Bachmann, *Zahlentheorie, III. Teil. Die Lehre von der Kreisteilung*,
[6] P. Bachmann, *Zahlentheorie, IV. Teil. Die Arithmetik der quadratischen Formen*, Leipzig 1898
[7] P. Bachmann, *Niedere Zahlentheorie*, Leipzig 1902
[8] P. Bachmann, *Zahlentheorie, V. Teil: Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper*, Leipzig 1905
[9] O. Blumenthal, *Lebensgeschichte*, in [22, Bd. 3, S. 388–429]
[10] P. Colmez, J.-P. Serre (Hrsg.), *Correspondance Serre-Tate*, I, II, Soc. Math. France 2015
[11] R. Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie von P. Lejeune-Dirichlet*, 3. Auflage Braunschweig 1879
[12] R. Dedekind, *Über die Begründung der Idealtheorie*, Gött. Nachr. (1895), 106–113; Werke II, 50–58
[13] R. Dedekind, *Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern*, J. Reine Angew. Math. **121** (1900), 40–123; Gesammelte Mathematische Werke vol. 2, 148–233
[14] L.E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol I (1920); vol II (1920); vol III (1923); Chelsea reprint 1952
[15] G. Frei, F. Lemmermeyer, P. Roquette, *Emil Artin and Helmut Hasse. The Correspondence 1923–1958* Springer-Verlag 2014
[16] R. Fueter, *Der Klassenkörper der quadratischen Körper und die komplexe Multiplikation*, Diss. Göttingen 1903
[17] E. Hecke, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Leipzig 1923
[18] E. Hecke, *Analysis und Zahlentheorie*, Vorlesung Hamburg 1920, P. Roquette (Hrsg.), Vieweg 1987
[19] D. Hilbert, *Über die Zerlegung der Ideale eines Zahlkörpers in Primideale*, Math. Ann. **44** (1894), 1–8
[20] D. Hilbert, *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Jahresber. Deutsche Math. Ver. **4** (1897), 175–546
[21] D. Hilbert, *Zahlentheorie*, Vorlesungen Wintersemester 1897/98; Göttingen 1990
[22] D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag 1932, 1933, 1935
[23] D. Hilbert, *Über das Unendliche*, Math. Ann. **95** (1925), 161–190
[24] C. R. Hobby, *The derived series of a p-group*, Diss. Caltech 1960

[25] A. Hurwitz, *Über die Theorie der Ideale*, Gött. Nachr. (1894), 291–298

[26] A. Hurwitz, *Zur Theorie der algebraischen Zahlen*, Gött. Nachr. (1895), 324–331

[27] A. Hurwitz, *Der Euklidische Divisionssatz in einem endlichen algebraischen Zahlkörper*, Math. Z. **3** (1919), 123–126

[28] C.G.J. Jacobi, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, F. Lemmermeyer, H. Pieper (Hrsg.), Rauner-Verlag

[29] K. Ireland, M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory*, Springer-Verlag 1990

[30] L. Kronecker, *De Unitatibus Complexis*, Diss. Universität Berlin 1845

[31] A.-M. Legendre, *Recherches d'analyse indéterminée*, Hist. Acad. Sci. Paris 1785 (1788), 465–559

[32] A.-M. Legendre, *Essai sur la Théorie des Nombres*, Paris 1798

[33] F. Lemmermeyer, *The development of the principal genus theorem*, in "The Shaping of Arithmetic" (C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer, eds.), Springer Verlag 2007

[34] F. Lemmermeyer, *Jacobi and Kummer's ideal numbers*, Abh. Math. Sem. Hamburg **79** (2009), 165–187

[35] F. Lemmermeyer, *Zur Zahlentheorie der Griechen. II: Gaußsche Lemmas und Rieszsche Ringe*, Math. Semesterber. **56** (2009), 39–51

[36] F. Lemmermeyer, P. Roquette (Hrsg.), *Der Briefwechsel Hasse - Scholz - Taussky*, Universitätsverlag Göttingen 2016;
`http://univerlag.uni-goettingen.de/handle/3/isbn-978-3-86395-253-2`

[37] F. Lemmermeyer, N. Schappacher, *Introduction*, English translation of Hilbert's Zahlbericht by I. Adamson, Springer Verlag 1998

[38] H.W. Lenstra, *Euclidean number fields of large degree*, Invent. Math. **38** (1977), 237–254

[39] A. Meyer, *Zur Theorie der zerlegbaren Formen, insbesondere der kubischen*, Vierteljahresschrift. Naturf. Ges. Zürich **42** (1897), 149–201

[40] E. Noether, *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern*, Math. Ann. **96** (1926), 26–61

[41] L.W. Reid, *The elements of the theory of algebraic numbers*, New York 1910

[42] G.-C. Rota, *Ten lessons I wish I had been taught*, Notices Amer. Math. Soc. **44** (1997), 22–25

[43] N. Schappacher, *David Hilbert, Report on algebraic number fields ('Zahlbericht') (1897)*, Landmark Writings in Western Mathematics, 1640–1940 (I. Grattan-Guinness, editor), 2005, 700–709

[44] F. K. Schmidt, *Algebraische Zahlentheorie I, II*, Vorlesungen Münster, WS 1949/50 und SS 1950

[45] H.J.S. Smith, *Report on the theory of numbers*, 1859–1865; reprint Chelsea 1965

[46] J. Sommer, *Vorlesungen über Zahlentheorie. Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Leipzig 1907

[47] E. Steinitz, *Algebraische Theorie der Körper*, J. Reine angew. Math. **137** (1910), 167–309

[48] O. Taussky, *Some non-commutativity methods in algebraic number theory*, in *A Century of Mathematics in America. Part II*, (P. Duren, ed.), 493–511

[49] O. Taussky-Todd, *Autobiography*, Mary Terrall (Hrsg.), Calif. Inst. Technology, Pasadena (1980), 1995

[50] A. Weil, *Une lettre et un extrait de lettre à Simone Weil*, Collected Papers I, 244–255

[51] A. Weil, *L'avenir des mathématiques*, in *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique* (F. Le Lionnais, Hrsg.), Paris 1962, 307–320; Collected Papers I, 359–372

[52] Wikipedia, *David Hilbert*, `https://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert`; aufgerufen am 30.12.2016

[53] H. Zasssenhaus, *Zur Vorgeschichte des Zahlberichts*, in *Hermann Minkowski. Briefe an David Hilbert* (L. Rüdenberg, H. Zassenhaus, Hrsg.), Springer-Verlag 1973, 17–21

Mörikeweg 1, 73489 Jagstzell, Germany
E-mail address: `hb3@ix.urz.uni-heidelberg.de`