Franz Lemmermeyer

Abitur Gabun 2021

Einleitung

Das Abitur in vielen nordafrikanischen Ländern (nicht nur in den Maghreb-Staaten) ähnelt, was das Format betrifft, dem französischen Vorbild. In vielen Aufgaben werden die Abiturienten schrittweise durch einen mathematischen Beweis geführt.

Im Abitur von Gabun aus dem Jahre 2021 ist als einziges Hilfsmittel ein wissenschaftlicher Taschenrechner erlaubt, und die Aufgaben sind in vier Stunden zu lösen.

Die Unterrichtssprache in Gabun ist Französisch; zu Hause sprechen die meisten Kinder einen Bantu-Dialekt. Etwa 70 % der Schüler beenden die Grundschule. Für die Bildung sind im Haushalt fast 10 % der Ausgaben vorgesehen.

Die abgeprüften Themengebiete sind nicht sehr weit von den hierzulande behandelten entfernt: Außer Analysis, Vektorgeometrie und Stochastik werden in Gabun allerdings auch Folgen, Reihen und komplexe Zahlen unterrichtet.

Allerdings behandeln die Aufgaben keine Situationen aus einer Parallelrealität wie in Deutschland; vielmehr werden die Schüler Schritt für Schritt durch ein längeres Argument geführt; letztendlich geht es darum, die Struktur von Beweisen verstehen zu lernen.

Die in den Aufgaben benutzte Sprache ist die korrekte mathematische Fachsprache. Es geht in Gabun nicht um Schaubilder ohne Sprung oder ohne Knick wie hierzulande, sondern um stetige und differenzierbare Funktionen. Wird eine Funktion auf ein Teilintervall eingeschränkt, erhält sie eine andere Bezeichnung, weil es Funktionen ohne Definitionsbereich nicht gibt. Weiter kann man sehen, dass man auch ohne Operatorenfetischismus Aufgabentexte sauber formulieren kann.

Eine Eigenheit der Aufgaben in Frankreich und den nordafrikanischen Ländern ist das *tableau de variation*, die Monotonietabelle. Für eine differenzierbare Funktion f bestimmt man dabei die Nullstellen von f' und gibt in den dadurch festgelegten Teilintervallen das Vorzeichen von f' an, sowie das Monotonieverhalten von f. Ist etwa $f(x) = (x-1)^2$, dann ist $f'(x) = 2(x-1)$, und die Gleichung $f'(x) = 0$ hat die Lösung $x = 1$. Weiter ist $f'(x) < 0$ für $x < 1$ und $f'(x) > 0$ für $x > 1$. Die Monotonietabelle von f ist gegeben durch

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dieser Tabelle entnimmt man ohne weiteres, dass f in $x = 1$ ein Minimum besitzt.

Die Aufgaben

1. Im folgenden multiple-choice Test ist genau eine der vier vorgegebenen Antworten richtig. Eine richtige Antwort ergibt 0,5 Punkte, für eine falsche werden 0,25 Punkt abgezogen; bei keiner Antwort werden 0 Punkte vergeben.

   1. In einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem betrachtet man die Punkte $A(2;1;1)$, $B(3;0;1)$, $C(0;1;5)$ und $D(-1;0;1)$.

      (a) Ein Normalenvektor der Ebene E_{ABC} ist

A	B	C	D
$\vec{n}(1;2;2)$	$\vec{n}(1;2;-2)$	$\vec{n}(2;0;1)$	$\vec{n}(2;2;1)$

      (b) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt

A	B	C	D
3	$\frac{3}{2}$	6	$\frac{\sqrt{5}}{2}$

   2. A, B und C sind Punkte im Raum, G ist der Schwerpunkt dieser drei Punkte, wobei A, B und C bzw. die Gewichte 1, 3 und 1 haben. I ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$.

      (a) Unter diesen Bedingungen kann man den Punkt G bestimmen durch

A	B	C	D
$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$	$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AI}$	$\overrightarrow{IG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{IB}$	$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BI}$

      (b) Die Menge M aller Punkte im Raum mit

      $$|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 5 \cdot |\overrightarrow{MI}|$$

      ist

      A die Mittelsenkrechte von $\overline{IG}$;

      B die Lotebene zu $\overline{IG}$ durch den Mittelpunkt der Strecke;

      C die Kugel mit Zentrum G und Radius 5;

      D die Kugel mit Zentrum I und Radius 5.

3. Sei (u_n) die Folge, die für alle natürlichen Zahlen n definiert ist durch

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Die Folge (v_n) ist definiert durch $v_n = \ln(u_n)$.

(a) Es gilt

A	B	C	D
$v_5 > 0$	$v_5 < 0$	$v_5 = \ln(\frac{36}{35})$	$v_5 = \ln(\frac{24}{25})$

(b) Der Grenzwert von (v_n) für $n \to \infty$ ist gegeben durch

A	B	C	D
0	1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

4. Sei (u_n) eine geometrische Folge mit $u_0u_1u_2 = 27$ und $u_0u_2u_4 = -216$.

(a) u_0 ist gleich

A	B	C	D
$-1{,}5$	3	1,5	-6

(b) Der Verhältnisfaktor q der Folge ist

A	B	C	D
q	-2	0,5	$-0{,}5$

5. Eine Urne enthält 3 rote, 4 gelbe und 2 blaue Kugeln. Man zieht zufällig zwei Kugeln gleichzeitig.

(a) Die Wahrscheinlichkeit, zwei Kugeln verschiedener Farbe zu ziehen, ist

A	B	C	D
$\frac{11}{18}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{7}{18}$

(b) Die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen, ist

A	B	C	D
$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{17}{18}$	$\frac{19}{18}$

2. Komplexe Zahlen

Man betrachte das auf $\mathbb{C}$ definierte Polynom P mit

$$P(z) = z^3 - 3(1+i)z^2 + (-7+30i)z + 33 - 19i.$$

1. (a) Berechne $P(1+i)$.

   (b) Bestimme die komplexen Zahlen α und β, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

   $$P(z) = (z-1-i)(z^2 + \alpha z + \beta).$$

   (c) Berechne $(4-3i)^2$.

   (d) Löse die Gleichung $x^2 - 2(1+i)x - 7 + 26i = 0$ in $\mathbb{C}$.

   (e) Löse damit die Gleichung $P(z) = 0$ in $\mathbb{C}$.

2. In der komplexen Ebene betrachten wir die Punkte A, B und C, welche von $z_A = 1+i$, $z_B = 5-2i$ und $z_C = -3+4i$ repräsentiert werden. Sei f die Transformation der Ebene, welche jedem Punkt $M(x;y)$ den Punkt $M'(x';y')$ zuordnet mit

   $$x' = 2x+3, \quad y' = 2y-4.$$

   (a) Setze $z = x+iy$ und $z' = x'+iy'$, wo x, x', x und y' reelle Zahlen sind. Zeige $z' = 2z+3-4i$.

   (b) Folgere daraus die Art der Abbildung f und ihre Matrix.

   (c) Sei (C) der Kreis, welcher durch die Gleichung $x^2+y^2-4x+6y+8=0$ beschrieben wird. Bestimme die Koordinaten seines Mittelpunkts Ω und seinen Radius r.

   (d) Zeige, dass der Punkt D mit $z_D = 1-i$ auf dem Kreis liegt, und konstruiere den Kreis C.

   (e) Sei (C') das Bild von C unter f. Bestimme die Natur von (C').

   (f) Folgere daraus eine Gleichung von C in kartesischen Koordinaten.

3. Untersuchung einer Funktion (10 Punkte) Sei f die Funktion, welche durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \ln(x^2+1) & \text{für } x \leq 0, \\ -x^2 + e^{-x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

definiert ist. Bezeichne mit (C) den Graphen von f in einem kartesischen Koordinatensystem, wobei eine Längeneinheit 2 cm entspricht.

Teil A. Untersuchung einer Hilfsfunktion.

Wir betrachten die Funktion g, die auf $\mathbb{R}$ durch $g(x) = -2x - e^{-x}$ definiert ist.

1. Bestimme das Verhalten von g für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

2. Untersuche g auf Monotonie und gib die Monotonietabelle an.

3. Begründe, dass $g(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

Teil B. Untersuchung der Funktion f

1. Zeige, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und bestimme das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

2. Untersuche f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

3. (a) Bestimme $f'(x)$ für alle $x \in]-\infty; 0[$, und untersuche das Vorzeichen von f auf diesem Intervall.

   (b) Gib die Monotonietabelle von f an. Beachte, dass $f'(x) = g(x)$ für $x \in]0; +\infty[$ gilt.

4. (a) Zeige, dass der Graph (Γ) der Gleichung $y = -x^2$ Asymptote der Kurve (C) für $x \to +\infty$ ist.

   (b) Untersuche die Lage des Graphen (C) in Bezug auf (Γ).

5. (a) Zeige, dass die Gleichung $f(x) = 0$ zwei reelle Lösungen besitzt, von denen eine (nämlich α) negativ und die andere (λ) positiv ist.

   (b) Bestimme den exakten Wert α und gib eine Approximation von λ auf eine Nachkommastelle genau an.

6. Zeichne die Graphen (C) und (Γ).

Teil C. Untersuchung einer Bijektion und Berechnung eines Flächeninhalts

1. Sei h die Einschränkung von f auf das Intervall $]0; +\infty[$.

   (a) Begründe, dass h eine Bijektion von $]0; +\infty[$ auf ein zu bestimmendes Intervall K ist.

   (b) Sei h^{-1} die zu h inverse Bijektion. Bestimme die Menge, auf welcher h^{-1} differenzierbar ist.

   (c) Gib die Monotonietabelle von h^{-1} an.

2. Sei (D) die Teilmenge der Ebene, welche von der Kurve (C), der x-Achse und der Geraden $x = \lambda$ begrenzt wird.

   (a) Schraffiere (D) in der obigen Zeichnung.

   (b) Sei $A(\lambda)$ der Flächeninhalt von (D) in cm^2. Gib $A(\lambda)$ als Funktion von λ an.

   (c) Zeige, dass gilt:

$$A(\lambda) = 4\Big(-\frac{\lambda^3}{3} - \lambda^2 + 1\Big).$$

Lösungen

1. (a) Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   Wegen $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ ist Antwort D richtig.

   (b) Es ist $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   Also ist $F_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+4^2+2^2} = 3$.

2. Der Schwerpunkt von A, B und C ist gleich dem Schwerpunkt von $(C,3)$ und dem Schwerpunkt $(I,2)$ von $(A,1)$ und $(B,1)$. Er liegt daher auf der Geraden durch B und I und genügt $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BI}$.

   (b) Wegen $\overrightarrow{MA} + 3\vec{BM} + \overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MG}$ ist die Bedingung gleichbedeutend mit $|\overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{MI}|$. Die Menge besteht also aus allen Punkten M, welche von G und I denselben Abstand haben. Also geht es um die Lotebene zur Strecke GI durch deren Mittelpunkt.

3. Wegen $v_5 = \ln(\frac{35}{36}) < \ln(1) = 0$ ist die Aussage B richtig (Weil keine zwei Antworten richtig sein können, kommen nur A oder B in Betracht).

   Wegen $u_n \to 1$ ist $v_n = \ln(u_n) \to \ln(1) = 0.$, d.h. Antwort A ist korrekt.

4. Wegen $u_n = q^n u_0$ sehen wir, dass $27 = u_0u_1u_2 = u_0^3q^3$ und $-216 = u_0u_2u_4 = u_0^3q^6$ gilt. Also muss $q^3 = -\frac{216}{27} = -8$ und damit $q = -2$ sein. Aus $27 = u_0^3q^3 = -8u_0^3$ folgt dann $u_0 = -\frac{3}{2}$.

5. Eine Urne enthält 3 rote, 4 gelbe und 2 blaue Kugeln. Man zieht zufällig zwei Kugeln gleichzeitig.

   (a) Die Wahrscheinlichkeit, zwei Kugeln verschiedener Farbe zu ziehen, ist

   $$\begin{aligned} p &= 2 \cdot p(rg) + 2 \cdot p(rb) + 2 \cdot p(gb) \\ &= 2 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{8} + 2 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{13}{18}. \end{aligned}$$

   (b) Die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen, ist demnach $1 - \frac{13}{18} = \frac{5}{18}$. Alternativ ist

   $$p(rr) + p(gg) + p(bb) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}.$$

2. Komplexe Zahlen Man betrachte das auf $\mathbb{C}$ definierte Polynom P mit

   $$P(z) = z^3 - 3(1+i)z^2 + (-7+30i)z + 33 - 19i.$$

   1. (a) Wegen $33 - 19i = (1+i)(7-26i)$ ist

   $$\begin{aligned} P(1+i) &= (1+i)[(1+i)^2 - 3(1+i)^2 - 7 + 30i + 7 - 26i] \\ &= (1+i)[2i - 6i + 4i] = 0. \end{aligned}$$

(b) Wegen

$$(z-1-i)(z^2+\alpha z+\beta) = \\ z^3-(1+i+\alpha)z^2+((1+i)\alpha+\beta)z-(1+i)\beta$$

folgt durch Koeffizientenvergleich

$$-(1+i)\beta = (1+i)(7-26i), \quad \text{also} \quad \beta = -7+26i,$$

sowie

$$\alpha-1-i = -3(1+i) = -3-3i, \quad \text{also} \quad \alpha = -2-2i.$$

Damit ist $\alpha = -(2+2i)$ und $\beta = -7+26i$.

(c) Es ist $(4-3i)^2 = 7-24i$.

(d) Die Lösungen der Gleichung $x^2-2(1+i)x-7+26i = 0$ sind

$$z_{1,2} = \frac{2+2i\pm\sqrt{8i-4(-7+26i)}}{2} = \frac{2+2i\pm\sqrt{28-96i}}{2} \\ = \frac{2+2i\pm 2\sqrt{7-24i}}{2} = \frac{2+2i\pm 2(4-3i)}{2},$$

also

$$z_1 = \frac{2+2i-8+6i}{2} = -3+4i, \quad z_2 = \frac{2+2i+8-6i}{2} = 5-2i.$$

2.(a) Es ist

$$z' = x'+y'i = 2x+3+(2y-4)i = 2(x+yi)+3-4i = 2z+3-4i.$$

(b) Es handelt sich um eine Streckung mit dem Faktor 2 nebst einer Verschiebung mit $3-4i$. Es ist also

$$\binom{x'}{y'} = 2\binom{x}{y} + \binom{3}{-4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\binom{x}{y} + \binom{3}{-4}.$$

(c) Es ist

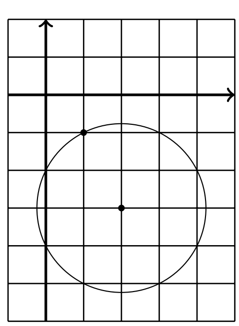
$$0 = x^2+y^2-4x+6y+8 = (x-2)^2+(y+3)^2-5.$$

Also ist (C) ein Kreis mit Mittelpunkt $\Omega(2|-3)$ und Radius $r = \sqrt{5}$.

(d) Einsetzen von $x = 1$ und $y = -1$ ergibt

$$(1-2)^2+(-1+3)^2 = 1^2+2^2 = 5.$$

Also liegt D auf dem Kreis.



(e) (C') ist ein Kreis mit Radius $2\sqrt{5}$ und Mittelpunkt $\Omega'(5|-7)$.

(f) Eine Gleichung von (C') ist daher $(x-5)^2+(y+7)^2=20$.

Teil A

(a) Es ist $g(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$.

(b) Es ist $g'(x) = -2+e^{-x} = 0$ für $x = -\ln 2$.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(c) Offenbar hat g in $x=-\ln 2$ ein Maximum. Wegen $g(-\ln 2) = 2\ln 2 - 2 < 0$ ist $g(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Teil B

(a) Wegen $x^2+1 \geq 1$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Weiter ist $f(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$.

(b) Es ist $f(0) = 1$ und $\lim_{x\to 1}(-x^2+e^{-x}) = 1$; also ist f stetig in $x=0$ und damit auf ganz $\mathbb{R}$.

Weiter hat $f_l(x) = 1-\ln(x^2+1)$ die Ableitung $f_l'(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$ mit $f_l'(0) = 0$, während $f_r(x) = -x^2+e^{-x}$ die Ableitung $f_r'(x) = g(x)$ mit $f_r'(0) = -1$ besitzt. Also ist f differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$*$	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(c) (a) Offenbar ist $f(x)-(-x^2) = e^{-x} \to 0$ für $x \to +\infty$. Also ist Γ Asymptote von C.

(b) C liegt oberhalb von Γ.

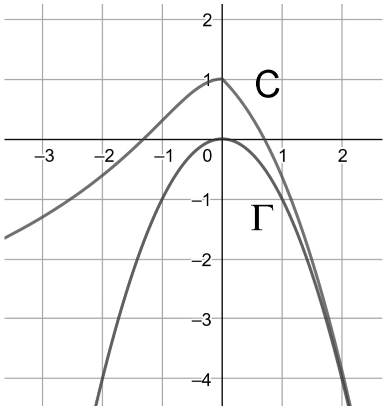
(d) (a) Wegen $f(0) = 1$, $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$, und weil f für $x<0$ streng monoton steigend ist, hat f genau eine Nullstelle mit $x<0$.

Wegen $f(0) = 1$, $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$, und weil f für $x<0$ streng monoton fallend ist, hat f genau eine Nullstelle mit $x>0$.

(b) Aus $1-\ln(x^2+1) = 0$ folgt $x^2+1 = e$, also $x = \pm\sqrt{e-1}$. Wegen $x<0$ ist daher $\alpha = -\sqrt{e-1}$.

Wegen $f(0{,}7) \approx 0{,}0066$ und $f(0{,}71) \approx -0{,}012$ ist $\lambda \approx 0{,}7$.

(e) Schaubilder von C und Γ:



Teil C

(a) h ist eine stetige monoton fallende Funktion mit $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$ und $h(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$ und bildet daher das Intervall $]0;+\infty[$ bijektiv auf $]-\infty, 0[$ ab.

(b) Weil h streng monoton fällt und $h'(x) \neq 0$ ist, ist h^{-1} auf $]-\infty, 0[$ differenzierbar.

(c) h^{-1} ist streng monoton fallend, also ist $(h^{-1})' < 0$ für alle $x < 1$.

2. (b) Es ist, weil eine Längeneinheit 2 cm und damit eine Flächeneinheit 4 cm^2 entspricht,

$$A(\lambda) = 4\int_0^\lambda (-x^2 + e^{-x})\,dx = -4\frac{x^3}{3} - 4e^{-x}\Big|_0^\lambda = 4\Big(-\frac{\lambda^3}{3} - e^{-\lambda} + 1\Big).$$

(c) Wegen $f(\lambda) = 0$ ist $e^{-\lambda} = \lambda^2$, also

$$A(\lambda) = 4\big(-\frac{\lambda^3}{3} - \lambda^2 + 1\big).$$

Franz Lemmermeyer, Mörikeweg 1, 73489 Jagstzell
hb3@uni-heidelberg.de