Franz Lemmermeyer

Abitur BW 2023

Um die Qualität der Abituraufgaben in anderen Ländern angemessen würdigen zu können seien die türkischen Aufgaben einem der beiden Wahlteile Analysis aus dem Abitur 2023 in Baden-Württemberg gegenüber gestellt.

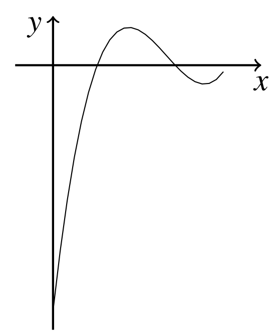
1. Die Aufgabe

Wir geben jetzt den Wahlteil A2.1 des baden-württembergischen Mathematik-Abiturs 2023.

Die Abbildung stellt die Planskizze einer Landstraße dar. Der Verlauf dieser Landstraße wird durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{27}{8}x^2 - 9x - \frac{13}{2} \quad \textit{für} \quad 0 \leq x \leq \frac{9}{2}$$

beschrieben. Die positive y-Achse beschreibt dabei die Himmelsrichtung Norden, die positive x-Achse die Himmelsrichtung Osten. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer in der Realität.



(a) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts P, der den nördlichsten Punkt der Landstraße darstellt.*

An der Stelle $x_0 = 3$ wechselt das Vorzeichen der Funktion f' vom Negativen ins Positive. Beschreiben Sie, was dies für den Verlauf der Landstraße bedeutet.

Teilergebnis: $P(2|1)$.

(b) *Ein Teil des Graphen der Funktion g mit*

$$g(x) = -\frac{27}{8}x^2 + \frac{75}{8}x - \frac{13}{2}$$

stellt einen Fahrradweg dar, der zwei Punkte der Landstraße verbindet. Diese beiden Punkte werden durch $A(a|f(a))$ und $B(b|f(b))$ mit $a < b$ beschrieben. Bestimmen Sie die Koordinaten von A und B.

Teilergebnis: $a = 0$, $b = 1$.

Berechnen Sie

$$\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx$$

und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Im Folgenden wird auch der Höhenverlauf der Landstraße betrachtet. Stelt $(r|f(r))$ einen Punkt auf der Landstraße dar, so gilt für seine Höhe $h(r)$:

$$h(r) = u(f(r)) \quad \text{mit} \quad u(x) = 2 - \frac{1}{500}(x-1)^2,$$

($h(r)$ in Kilometern über der Meereshöhe).

(c) *Zeigen Sie, dass der westlichste Punkt der Landstraße auf einer Höhe von etwa 1890 Meter liegt.*

Begründen Sie, dass kein Punkt der Landstraße höher als 2000 m liegt.

Der am höchsten gelegene Punkt auf der Landstraße wird durch den Punkt S auf dem Graphen von f dargestellt. Bestimmen Sie die Koordinaten von S

(d) *Zum Abfluss von Regenwasser sind die durch $P(2|1)$ und $Q(0|f(0))$ dargestellten Punkte auf der Landstraße durch ein geradlinig verlaufendes Rohr verbunden. Berechnen Sie das Gefälle dieses Rohrs.*

2. Kommentar

Zu dieser Aufgabe[1] gibt es Einiges zu sagen. Wir beginnen mit dem Sachzusammenhang.

Sachzusammenhang

Dass Straßen bei der Planung durch Funktionen dritten Grades beschrieben werden gehört zu den Märchen im modernen Mathematikunterricht in Deutschland. Es soll den Schülern eine Realitätsnähe vorgegaukelt werden, indem man Sachzusammenhänge postuliert, die allen Lehrern und (hoffentlich) den meisten Schülern als komplett realitätsfremd erscheinen müssen. Welches Problem des Straßenbaus wird denn dadurch gelöst, dass man den Straßenverlauf durch eine Funktion beschreibt? Welche Schüler werden von solchen Aufgaben davon überzeugt, dass Mathematik eine Wissenschaft ist, die im Ruf steht, relevante Probleme lösen zu können? Wer wird von solchen Aufgaben zu einem Studium der Mathematik geführt?

Inhaltlich hält sich die Realitätsnähe in engen Grenzen. Zum Einen führt ein Fahrradweg selten von einem Punkt einer Landstraße zu einem anderen, sondern läuft in der Regel daneben her. Zum Andern ist zu bemerken, dass es selbst für ein Bundesland mit Stuttgart ~~21~~ ~~25~~ 26 ein bisschen arg weit hergeholt ist, dass zum Abfluss von Regenwasser von der Landstraße ein kilometerlanges Rohr verlegt wird, um das Wasser danach wieder auf die Landstraße zurückzuleiten. Dazu kommt, dass das Regenabflussrohr an der höchsten Stelle der Straße beginnt, also genau dort, wo man nun wirklich keine Angst vor stehendem Wasser haben muss.

Anscheinend muss man hierzulande auch nicht befürchten, dass der Abfluss bei einem Gefälle von 1,4 % schon nach drei Wochen verstopft ist.

[1] Lösungen dieser Aufgabe findet man inzwischen an sehr vielen Stellen im Netz.

Mathematischer Kommentar

Dieser Teil des Kommentars könnte sehr kurz sein, weil mathematisch nicht sehr viel passiert:

- Ableiten von f und Lösen einer quadratischen Gleichung;
- Schnittpunkt zweier Funktionen durch Lösen einer weiteren quadratischen Gleichung;
- Berechnen des Integrals einer Funktion dritten Grades;
- Berechnung des Funktionswertes $h(0)$
- Berechnung der Steigung einer Graden durch zwei Punkte.

Von einer Ableitung (Klasse 10) und einem Integral (Klasse 11) abgesehen wird hier mathematisch nur nach Inhalten gefragt, die aus Klasse 8 bekannt sein sollten. Mathematische Ideen braucht man an keiner einzigen Stelle.

Dennoch war diese Aufgabe für Schüler ab Teil (c) sehr schwierig, und zwar einzig und allein aus sprachlichen Gründen. Das beginnt mit der verquasten Einführung der Höhe. Ist $(r|f(r))$ ein Punkt der Landstraße, so ist die Höhe gegeben durch $h(r) = u(f(r))$, wobei u als Funktion von x gegeben ist. Dieses x hat nun nichts mit dem x aus Teil (a) oder (b) zu tun, denn wenn man genau hinsieht, ist $x = f(r)$ die y-Koordinate des Punkts $(r|f(r))$ der Landstraße.

Hier wird mit unlauteren Mitteln (erfolgreich) versucht, die Schüler zu verwirren. Zu rechnen gibt es bei der Bestimmung des höchsten Punktes auch gar nichts: Die von u beschriebene Parabel hat ihren Scheitel an der Stelle $x = 1$; weil $x = 1$ in (a) $y = 1$ bedeutet, und weil man in (a) das Maximum von f bei $P(2|1)$ gefunden hat, muss S die Koordinaten $S(2|1)$ haben. Wer nicht sieht, dass man nichts machen muss, verliert sehr viel Zeit bei der rechnerischen Lösung.

Auch die Frage nach dem Gefälle in Teil (d) hat einen Großteil der Schüler dazu verführt, die Steigung der Geraden durch $P(2|1)$ und $Q(0|-\frac{13}{2})$ zu bestimmen, während es tatsächlich um die Steigung der Geraden durch $P(2|1|h(1))$ und $Q(0|-\frac{13}{2}|h(-\frac{13}{2}))$ gegenüber der x_1x_2-Ebene geht.

Fazit

Abschließend sei gesagt, dass Lehrer den Großteil der eigentlichen Vorbereitung auf das Abitur nicht mit dem Üben von Ableiten oder Integrieren oder mit mathematisch anspruchsvollen Aufgaben verbringen, sondern damit, den Schülern beizubringen, wie man aus verwirrenden Aufgabentexten errät, was die Aufgabensteller gemeint haben könnten. Ebenfalls üben muss man, welche Informationen man der beigefügten Skizze entnehmen darf und welche nicht – die Zeit im Abitur ist inzwischen ein sehr knappes Gut.

Würde man das Zentralabitur abschaffen, könnte wenigsten an einigen Schulen des Landes in der Oberstufe ein Mathematikunterricht stattfinden. Etwa ein solcher, mit dem man die eklatanten Lücken in elementarster Algebra schließen könnte, damit die deutschen Abiturienten zumindest ein Drittel der türkischen Aufgaben lösen könnten.

Franz Lemmermeyer, Mörikeweg 1, 73489 Jagstzell
hb3@uni-heidelberg.de