SKALAR- UND KREUZPRODUKT

FRANZ LEMMERMEYER

1. Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ordnet zwei Vektoren eine Zahl zu. Physikalisches Vorbild ist die Beziehung $E = \vec{F} \cdot \vec{s}$, in welcher einer Kraft und einem Weg (beides Vektoren) die aufzuwendende Energie eine Zahl) zugeordnet wird.

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren definieren wir durch die Gleichung

$$\binom{a}{b} \cdot \binom{c}{d} = ac + bd, \qquad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = ad + be + cf. \tag{1}$$

Ein solches Produkt heißt Skalarprodukt, weil das Ergebnis ein Skalar ist, also eine ungerichtete Größe.

So gilt

$$\binom{2}{-1} \cdot \binom{2}{3} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1,$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 0 - 2 = 0.$$

Satz 1. *Für das durch (1) definierte Skalarprodukt gilt:*

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2. \tag{2}$$

In Worten: Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist gleich dem Quadrat seiner Länge.

In der Tat gilt in der Ebene

$$\binom{a}{b} \cdot \binom{a}{b} = a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2 + b^2}\,)^2$$

und im Raum entsprechend

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}^{\,2}.$$

Damit können wir jetzt zeigen:

Satz 2. *Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann* 0*, wenn diese aufeinander senkrecht stehen:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

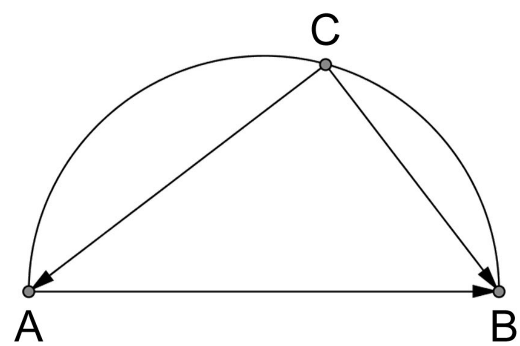

Abbildung 1. Skalarprodukt und der Satz des Pythagoras

Zum Beweis betrachten wir ein Dreieck ABC mit $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$. Damit gilt $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Um mit den Seitenlängen bequem rechnen zu können, setzen wir $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$ und $c = |\vec{c}|$.

Wir wollen zeigen, dass der Winkel in C genau dann ein rechter Winkel ist, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Dazu rechnen wir das Skalarprodukt $\vec{c} \cdot \vec{c}$ auf zwei Arten aus: einmal ist

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = |\vec{c}\,|^2 = c^2,$$

zum andern gilt

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}\,)(\vec{a} - \vec{b}\,) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Zusammen haben wir also

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}. \tag{3}$$

Hat das Dreieck ABC einen rechten Winkel in C, dann stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander, und nach Pythagoras ist $a^2 + b^2 = c^2$. Also muss in diesem Falle $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ sein.

Ist umgekehrt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, so folgt aus der obigen Rechnung $c^2 = a^2 + b^2$, und nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras muss das Dreieck rechtwinklig sein. Damit haben wir Satz 2 bewiesen.

Übungen.

(1) Zeige, dass das Dreieck ABC mit $A(1|0|1)$, $B(2|2|3)$ und $C(4|1|3)$ rechtwinklig ist, und berechne Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.

(2) Prüfe, ob das Dreieck ABC mit $A(7|4|7)$, $B(1|1|1)$, $C(4|7|-5)$ gleichschenklig oder rechtwinklig ist, und bestimme ggf. Flächeninhalt und alle Winkel.

(3) Bestimme k so, dass die Vektoren $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ k \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ senkrecht aufeinander stehen.

(4) (Reifeprüfung Schweden 1965)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \binom{1}{3}$ und $\vec{b} = \binom{3}{-1}$. Zeige, dass die Vektoren $t\vec{a} + \vec{b}$ und $t\vec{b} - \vec{a}$ unabhängig von t orthogonal zueinander sind.

2. Das Kreuzprodukt

Im Raum kann man zwei Vektoren einen dritten Vektor zuordnen, der auf die beiden gegebenen Vektoren senkrecht steht

Wir suchen also einen Vektor $\vec{n} = \left(\begin{smallmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{smallmatrix}\right)$, der senkrecht auf $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right)$ steht. Aus $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$ folgen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 &= 0, \\ b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wir können n_1 eliminieren, indem wir die erste Gleichung mit b_1 und die zweite mit a_1 multiplizieren und subtrahieren; wir erhalten dann

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2) n_2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) n_3 = 0,$$

also

$$(a_3 b_1 - a_1 b_3) n_3 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) n_2.$$

Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen; die einfachste von 0 verschiedene erhält man, indem man einfach

$$n_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \quad \text{und} \quad n_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

setzt. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} a_1 n_1 = -a_2 n_2 - a_3 n_3 &= -a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) - a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2), \end{aligned}$$

also, wenn nicht gerade $a_1 = 0$ ist,

$$n_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2.$$

Das ergibt die folgende Formel für einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht:

$$\vec{n} = \left(\begin{smallmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{smallmatrix}\right).$$

Diesen Vektor $\vec{n}$ nennt man das Kreuzprodukt (auch Vektorprodukt) von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, und schreibt $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Satz 3. *Das Kreuzprodukt $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.*

Wir müssen nur nachrechnen, dass die beiden Skalarprodukte $\vec{n} \cdot \vec{a}$ und $\vec{n} \cdot \vec{b}$ verschwinden:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{a} &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2 + a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 + a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 = 0. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt (auch im Falle $a_1 = 0$).

Man beachte, dass das Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selbst immer den Nullvektor ergibt: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Ebenfalls ungewöhnlich ist die Tatsache, dass das Kreuzprodukt antikommutativ ist, dass also $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ gilt. Auch dies kann man einfach nachrechnen.

Die Berechnung des Kreuzprodukts zweier Vektoren erfolgt nicht durch Auswendiglernen der Formel, sondern durch Anwenden des folgenden Schemas. Zur Berechnung von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gehen wir so vor: wir schreiben die Koordinaten der Vektoren zweimal untereinander, streichen die erste und die letzte Zeile, und ordnen jedem Schema $\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}$ die Zahl $ad - bc$ zu. Dies sieht dann so aus:

$$\begin{array}{rr} \cancel{2} & \cancel{1} \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ \cancel{-1} & \cancel{2} \end{array}$$

Wir finden so

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor steht auf die beiden gegebenen Vektoren senkrecht, wie man leicht nachprüfen kann (und sollte):

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 8 - 5 - 3 = 0, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 - 10 + 6 = 0.$$

Übungen.

(1) Zeige, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt.

(2) Berechne die folgenden Kreuzprodukte und kontrolliere das Ergebnis mit Hilfe des Skalarprodukts.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) Zeige, dass für jeden Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ das Kreuzprodukt von $\vec{a}$ mit sich selbst den Nullvektor ergibt, dass also $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ gilt.

3. Ebenengleichungen

Geraden in der Ebene. Geraden in der Ebene kann man in der Parameterform $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ schreiben oder in der Koordinatenform $ax + by = c$; wenn die Gerade nicht parallel zur y-Achse ist, kann man die Gleichung nach y auflösen und auf die Form $y = mc + d$ bringen.

Die Verwandlung einer Parametergleichung in eine Koordinatengleichung ist dabei kein Problem. Ist die Gerade etwa

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dann können wir den Parameter t eliminieren, indem wir die Gleichung mit einem auf $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonalen Vektor multiplizieren, etwa mit $\vec{u}_\perp = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad && \Big| \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ -x + 2y &= -3 + 4 + t(-2 + 2) = 1 \end{aligned}$$

Also ist $-x + 2y = 1$ eine Gleichung der Geraden in Koordinatenform; Auflösen nach y ergibt $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Um eine Gleichung in Koordinatenform in Parameterform zu verwandeln, beschafft man sich mit einer Wertetabelle zwei Punkte auf der Geraden und stellt damit eine Parametergleichung auf. So liegen $A(1|1)$ und $B(3|2)$ auf der Geraden, also ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Parametergleichung.

Ebenengleichungen. Um jeden Punkt einer Ebene darzustellen, geht man von einem Punkt P auf der Ebene aus und addiert dann Vielfache zweier Vektoren, die in der Ebene liegen.

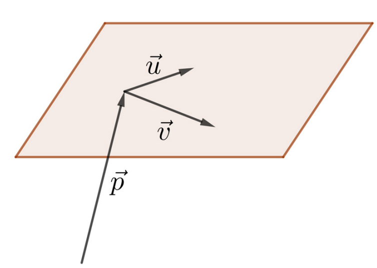

Abbildung 2. Ebene mit Stützvektor und Spannvektoren

Sind A, B und C drei Punkte, die in einer Ebene liegen, so ist

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$$

eine Ebenengleichung in Parameterform. Die allermeisten Rechnungen lassen sich einfacher durchführen, wenn man die Ebene mit einer Koordinatengleichung beschreibt.

Sind etwa $A(1|1|1)$, $B(-1|1|0)$ und $C(3|0|1)$ gegeben, so lautet eine Parametergleichung der Ebene

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als nächstes berechnen wir einen Vektor $\vec{n}$, der auf die beiden Spannvektoren senkrecht steht (einen solchen Vektor nennt man einen Normalenvektor der Ebene):

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Jetzt multiplizieren wir die Parametergleichung mit diesem Vektor:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Big| \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -1 - 2 + 2 = -1. \end{aligned}$$

Also lautet eine Koordinatenform der Ebenengleichung

$$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1,$$

oder, nach Multiplikation mit -1, auch

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1.$$

Übungen.

(1) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene durch die Punkte A, B und C.
   (a) $A(0|2|-1), B(2|3|5), C(1|0|1)$
   (b) $A(7|2|-1), B(4|1|3), C(1|3|2)$
   (c) $A(1|2|-1), B(6|-5|11), C(3|2|0)$
   (d) $A(9|3|-3), B(8|4|-9), C(11|13|-7)$

(2) Liegen die Punkte $A(1|1|-1)$ oder $B(1|2|0)$ auf der Ebene $E: 2x_1 - x_3 = 2$?

(3) Untersuche, ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen (Ebene durch drei Punkte aufstellen, dann Punktprobe).
   (a) $A(0|1|-1)$, $B(2|3|5)$, $C(-1|3|-1)$, $D(2|2|2)$
   (b) $A(3|0|2)$, $B(5|1|9)$, $C(6|2|7)$, $D(8|3|14)$
   (c) $A(5|0|5)$, $B(6|3|2)$, $C(2|9|0)$, $D(3|12|-3)$
   (d) $A(1|1|1)$, $B(3|3|3)$, $C(-2|5|1)$, $D(3|4|-2)$

(4) Die Ebene $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthält offensichtlich den Punkt $(2|1|1)$, wie man sieht, wenn man $r = s = 0$ setzt. Sie enthält offensichtlich auch die Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, wie man erkennt, wenn man entweder $s = 0$ oder $r = 0$ setzt.

Umgekehrt kann man Ebenen, welche die Gerade $g : \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$ enthalten, immer in der Form $E : \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$ schreiben.

Bestimme nun Parameter- und Koordinatengleichungen der Ebenen, welche die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthalten und

(a) parallel zur x_1-Achse ist?

(b) parallel zur Geraden $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist?

(c) den Punkt $Q(3|1|2)$ enthalten?

Hinweise.

(a) Damit die Ebene parallel zur x_1-Achse ist, reicht es, einen Spannvektor zu wählen, der in Richtung x_1-Achse zeigt.

(b) Auch hier kann man den zweiten Spannvektor der Geraden entnehmen.

(c) Um sich einen zweiten Spannvektor zu basteln, braucht man zwei Punkte, die in der Ebene liegen. Einer davon ist Q.

(5) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene durch die Punkte $A(2|1|1)$, $B(3|-1|1)$ und $C(0|2|1)$.

Warum hätte man das Ergebnis sofort hinschreiben können?

Bestimme analog Koordinatengleichungen der Ebene durch A, B und C für

(a) $A(2|1|-1)$, $B(3|0|-1)$, $C(2|2|-1)$

(b) $A(1|2|3)$, $B(1|0|1)$, $C(1|-3|4)$

(c) $A(2|0|3)$, $B(1|0|2)$, $C(4|0|-1)$

Lösungen

Skalarprodukt.

(1) Zeige, dass das Dreieck ABC mit $A(1|0|1)$, $B(2|2|3)$ und $C(4|1|3)$ rechtwinklig ist, und berechne Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.

Wir finden

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 - 2 = 0$ stehen diese beiden Vektoren senkrecht; also ist das Dreieck rechtwinklig in B.

Wegen $|\overrightarrow{AB}| = 3$ und $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5}$ hat das Dreieck Flächeninhalt $\frac{3}{2}\sqrt{5}$.

(2) Prüfe, ob das Dreieck ABC mit $A(7|4|7)$, $B(1|1|1)$, $C(4|7|-5)$ gleichschenklig oder rechtwinklig ist, und bestimme ggf. Flächeninhalt und alle Winkel.

Wir finden

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -18 - 18 + 36 = 0$ ist das Dreieck rechtwinklig in B. Wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 9$ ist das Dreieck auch gleichschenklig. Insbesondere gilt $\alpha = \gamma = 45°$.

Der Flächeninhalt ist offenbar $A = \frac{9 \cdot 9}{2} = \frac{81}{2}$.

(3) Bestimme k so, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen.

Das Skalarprodukt muss verschwinden:

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 4 \end{pmatrix} = 2 + 2k - 4 = 2k - 2$$

ergibt $k = 1$.

(4) (Reifeprüfung Schweden 1965)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zeige, dass die Vektoren $t\vec{a} + \vec{b}$ und $t\vec{b} - \vec{a}$ unabhängig von t orthogonal zueinander sind.

Wir müssen zeigen, dass das Skalarprodukt verschwindet:

$$t\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+3 \\ 3t-1 \end{pmatrix},$$

$$t\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3t \\ -t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t-1 \\ -t-3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} t+3 \\ 3t-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3t-1 \\ -t-3 \end{pmatrix} = (t+3)(3t-1) + (3t-1)(-t-3) = (3t-1)(t+3-3-t) = 0.$$

Kreuzprodukte.

(1) Zeige, dass $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ gilt.

Nachrechnen. Beachte, dass die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ der rechte-Hand-Regel genügen; das ist bei $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ immer so.

(2) Berechne die folgenden Kreuzprodukte und kontrolliere das Ergebnis mit Hilfe des Skalarprodukts.

a) $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\2\\10\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

(3) Zeige, dass für jeden Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ das Kreuzprodukt von $\vec{a}$ mit sich selbst den Nullvektor ergibt, dass also $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ gilt.

Nachrechnen:

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2a_3-a_3a_2\\a_3a_1-a_1a_3\\a_1a_2-a_2a_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ebenengleichungen.

(1) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene durch die Punkte A, B und C.

(a) $A(0|2|-1), B(2|3|5), C(1|0|1)$

Parameterform:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

Kreuzprodukt der Spannvektoren:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\2\\-5\end{pmatrix}$$

Multiplikation mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}14\\2\\-5\end{pmatrix}$ ergibt

$$A_{ABC} : 14x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 9.$$

Punktprobe mit B und C, um Rechenfehler zu entdecken:

$$28 + 6 - 25 = 9, \quad 14 - 5 = 9;$$

die Gleichung ist also korrekt.

Das Ergebnis hängt nicht vom Rechenweg ab: wählen wir eine andere Parameterform, erhalten wir dieselbe Koordinatengleichung:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(ich habe $\overrightarrow{CB}$ statt $\overrightarrow{BC}$ benutzt, um Vorzeichen zu sparen). Kreuzprodukt der Spannvektoren:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

also können wir wieder $\vec{n} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ nehmen (beim Normalenvektor ist nur die Richtung wichtig).

(b) $A(7|2|-1), B(4|1|3), C(1|3|2)$

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -15 \\ -9 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix},$$

also $E: 7x_1 + 15x_2 + 9x_3 = 7 \cdot 7 + 15 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) = 70$.

Kontrolle mit B: $7 \cdot 4 + 15 \cdot 1 + 9 \cdot 3 = 70$.

(c) $A(1|2|-1), B(6|-5|11), C(3|2|0)$

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 19 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$E: -7x_1 + 19x_2 + 14x_3 = 17$.

Kontrolle durch Punktprobe mit B ergibt $-42 - 95 + 154 = 17$.

(d) $A(9|3|-3), B(8|4|-9), C(11|13|-7)$

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$E: 14x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 123$

(2) Liegen die Punkte $A(1|1|-1)$ oder $B(1|2|0)$ auf der Ebene $E: 2x_1 - x_3 = 2$?

- A einsetzen: $2 + 1 = 2$ ist falsch, A liegt nicht in der Ebene E.
- B einsetzen: $2 - 0 = 2$ ist richtig, B liegt in der Ebene E.

(3) Untersuche, ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen:

(a) $A(0|1|-1)$, $B(2|3|5)$, $C(-1|3|-1)$, $D(2|2|2)$

Parameterform der Ebene E_{ABC}:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ebenengleichung $E: 2x_1 + x_2 - x_3 = 2$. Probe mit B und C ergibt $4 + 3 - 5 = 2$ bzw. $-2 + 3 + 1 = 2$, die Gleichung ist also korrekt.

Punktprobe mit D ergibt $4 + 2 - 2 = 2$, also liegt D auf der Ebene.

(b) $A(3|0|2)$, $B(5|1|9)$, $C(6|2|7)$, $D(8|3|14)$

$E: 9x_1 - 11x_2 - x_3 = 25$. Punktprobe mit D: $72 - 33 - 14 = 25$, also liegt D in der Ebene.

(c) $A(5|0|5)$, $B(6|3|2)$, $C(2|9|0)$, $D(3|12|-3)$

$E: 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 75$. Punktprobe mit D: $18 + 84 - 27 = 75$, also liegt D in der Ebene.

(d) $A(1|1|1)$, $B(3|3|3)$, $C(-2|5|1)$, $D(3|4|-2)$

$E: 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0$. Punktprobe mit D: $12 + 12 + 14 = 38$, also liegt D nicht in der Ebene.

(4) Bestimme Parameter- und Koordinatengleichungen der Ebenen, welche die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthalten und

(a) parallel zur x_1-Achse ist?

(b) parallel zur Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist?

(c) den Punkt $Q(3|1|2)$ enthalten?

(a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_2 - x_3 = 1$

(b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 6$.

(c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-0 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; Kreuzprodukt der Spannvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $E : 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 7$.

(5) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene durch die Punkte $A(2|1|1)$, $B(3|-1|1)$ und $C(0|2|1)$.

Alle Punkte liegen offensichtlich in der Ebene $x_3 = 1$.

Bestimme analog Koordinatengleichungen der Ebene durch A, B und C für

(a) $A(2|1|-1)$, $B(3|0|-1)$, $C(2|2|-1)$: $x_3 = -1$;

(b) $A(1|2|3)$, $B(1|0|1)$, $C(1|-3|4)$: $x_1 = 1$;

(c) $A(2|0|3)$, $B(1|0|2)$, $C(4|0|-1)$: $x_2 = 0$.