QUADRATISCHE GLEICHUNGEN

FRANZ LEMMERMEYER

1. Vorbereitungen

Die folgenden Aufgaben dienen der Wiederholung elementarer algebraischer Techniken: Ausmultiplizieren, Ausklammern, Zusammenfassen und Vereinfachen von Termen.

(1) Berechne:

a) $3(1+4x)$ b) $5(ab+2cd)$
c) $a(a+bc)$ d) $rs(r+s)$

(2) Berechne:

a) $(a+b)(a+c)$ b) $(a-2b)(b-2a)$
c) $a(r-s)-r(a-s)$ d) $a(a+b)-b(a+b)$

(3) Klammere so viel aus wie möglich:

a) $12x+18y$ b) $24xy-30x$
c) ax^2+2abx d) $12rs^2-15r^2s$

(4) Fasse zusammen:

a) $\frac{a}{5}+\frac{2a}{5}$ b) $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}$
c) $\frac{3x}{7}-\frac{y}{2}$ d) $x+\frac{2x}{3}$

(5) Fasse zusammen:

a) $1+\frac{1}{a}$ b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$
c) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ d) $a-\frac{a}{b}$

(6) Fasse zusammen:

a) $\frac{a}{2} \cdot \frac{4}{a}$ b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$

c) $\frac{3a}{3b} \cdot \frac{3ab}{2}$ d) $x \cdot \frac{2}{x}$

(7) Fasse zusammen:

a) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)x$ b) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x + y)$

c) $2x\left(\frac{3}{2x} - \frac{5}{4x}\right)$ d) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)(x - y)$

(8) Vereinfache:

a) $\frac{x}{2} : x$ b) $\frac{x}{2} : 2$

c) $\frac{a}{2} : \frac{a}{3}$ d) $\frac{a}{2} : \frac{b}{2}$

(9) Vereinfache:

a) $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ b) $\frac{a}{b} : \frac{b}{a}$

c) $\frac{x-1}{y} : \frac{x-1}{x}$ d) $\frac{a}{b} : \frac{2a}{b}$

2. Lineare Gleichungen

Zur Bestimmung der Nullstellen einer Geraden, etwa $y = 2x - 5$, muss man den Punkt auf der Geraden suchen, der y-Koordinate 0 hat, also die Gleichung $y = 2x - 5 = 0$ lösen. Das ist einfach:

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 0 && \mid +5 \\ 2x &= 5 && \mid :2 \\ x &= \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

Gleichungen der Form $ax + b = 0$ nennt man lineare Gleichungen.

Solche treten auf, wenn man die Nullstelle einer Geraden oder den Schnittpunkt zweier Geraden berechnet:

- Nullstellen von Geraden $y = mx + b$ sind Lösungen der Gleichung $y = 0$, also von $mx + b = 0$.

- Schnittpunkte zweier Geraden $y = mx + b$ und $y = nx + c$ erhält man durch Lösen der Gleichung $mx + b = nx + c$. Wenn die Geraden echt parallel sind (parallel und nicht gleich also $m = n$, aber $b \neq c$), dann gibt es keinen Schnittpunkt und keine Lösung der Gleichung.

Beim Lösen linearer Gleichungen (und erst recht von solchen höherer Ordnung) muss man sich beim Vereinfachen an einfache, aber wesentliche Regeln halten: Steht auf einer Seite ein Term $+3$, dann bekommt man diesen auf die andere Seite, indem man auf beiden Seiten -3 addiert. Hat man einen Term $4x$ und will die 4 wegbringen, so muss man sich klar machen, dass hier $x \cdot 4$ steht und die Umkehroperation der Multiplikation nicht die Subtraktion (man kann diese 4 also nicht mit -4 wegbringen), sondern die Division ist: einen Faktor 4 bringt man mit $: 4$ auf die andere Seite.

Bei Gleichungen mit Nennern empfiehlt es sich oft, mit dem Hauptnenner durchzumultiplizieren:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2} + \frac{x}{3} &= \frac{x}{4} + 5 && \Big| \cdot 3 \\
\frac{3x}{2} + \frac{3x}{3} &= \frac{3x}{4} + 3 \cdot 5 \\
\frac{3x}{2} + x &= \frac{3x}{4} + 15 && \Big| \cdot 4 \\
\frac{4 \cdot 3x}{2} + 4x &= \frac{4 \cdot 3x}{4} + 4 \cdot 15 \\
6x + 4x &= 3x + 60 \\
10x &= 3x + 60 && \Big| -3x \\
7x &= 60 && \Big| :7 \\
x &= \frac{60}{7}
\end{aligned}$$

Eine weitere wichtige Regel: Multipliziert man eine Gleichung mit einem Faktor, etwa mit 3, dann muss man *jeden Summanden* mit 3 multiplizieren. Multipliziert man dagegen ein Produkt wie $2ab$ mit 3, dann ist $2ab \cdot 3 = 6ab$ und nicht $2ab \cdot 3 = 6 \cdot 3a \cdot 3b$: das Doppelte von $3 \cdot 5 = 15$ ist $6 \cdot 5 = 3 \cdot 10 = 30$ und nicht $6 \cdot 10 = 60$.

Ein weiterer oft gemachter Fehler ist folgender: wird $-\frac{x-1}{2}$ mit 2 multipliziert, erhält man

$$-\frac{x-1}{2}\cdot 2 = -\frac{2(x-1)}{2} = -(x-1) = 1-x$$

und nicht etwa $-x-1$: der Bruchstrich ersetzt eine Klammer, und wenn der Bruchstrich wegfällt, muss die Klammer geschrieben werden.

Einen ähnlichen Fehler kann man beim Lösen der Gleichung

$$\frac{x}{x-2} = 3$$

machen: Den Nenner bekommt man durch Multiplikation mit $x-2$ weg, allerdings nur so:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x-2} &= 3 && \Big|\ \cdot(x-2)\\
x &= 3(x-2)\\
x &= 3x-6 && \Big|\ -x+6\\
6 &= 2x && \Big|\ :2\\
3 &= x
\end{aligned}$$

Dass wir richtig gerechnet haben, können wir durch eine Probe bestätigen. Einsetzen von $x=3$ in die Ausgangsgleichung ergibt

$$\frac{3}{3-2} = 3,$$

und das stimmt.

(1) Löse folgenden linearen Gleichungen.

a) $3x-1=0$ b) $2-5x=7$

c) $2-\frac{3}{x}=1$ d) $11x=12x$

(2) Prüfe, ob der Punkt P auf der Geraden g liegt:

a) $P(1|1);\ g:\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ b) $P(5|3);\ g:\ y=5x-8$

c) $P(-3|4);\ g:\ y=-5x+4$ d) $P(2|-7);\ g:\ y=x-9$

(3) Berechne den Schnittpunkt der folgenden Geraden:

a) $y=2x-1$ und $y=1-x$;

b) $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}$ und $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}$.

(4) Löse folgende Gleichung durch Ausmultiplizieren (binomische Formeln!):

a) $x^2 = (1-x)^2$ b) $(x+1)^2 = (x-1)^2$

c) $(2x-1)^2 = (3-2x)^2$ d) $(x+2)^2 = (x+1)^2 + 5$

(5) Löse folgende Gleichungen.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = 1$ b) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x} = 25$

c) $\frac{3}{x} + 2 = \frac{1}{x}$ d) $\frac{3}{x} = \frac{1}{x-1}$

(6) Wenn man die Seiten eines quadratischen Beets um einen Meter verlängert, dann nimmt sein Flächeninhalt um 5 m^2 zu. Welche Seitenlänge hat das neue Beet?

(7) Wenn man eine Zahl verdoppelt und dann 7 subtrahiert, erhält man die Ausgangszahl. Um welche Zahl handelt es sich?

(8) Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen ist 39. Um welche Quadratzahlen handelt es sich?

(9) Löse folgenden Gleichungen ohne Taschenrechner.

a) $\frac{x-5}{4} + 6x = \frac{284-x}{5}$

b) $\frac{19-x}{2} = x + \frac{11-x}{3}$

c) $2x + \frac{3x+5}{5} = 5 + \frac{10x-8}{2}$

d) $x + \frac{3x-5}{2} = 12 - \frac{2x-4}{3}$

(10) Löse folgende Gleichungen nach x auf.

$$\frac{x}{a} - b = \frac{c}{d} - x$$

$$\frac{a}{b+cx} = \frac{d}{f-hx}$$

3. Reinquadratische Gleichungen

Zur Bestimmung der Nullstellen einer Parabel, etwa $y = x^2 - 4$, muss man ebenfalls $y = 0$ setzen, also die Gleichung $x^2 - 4 = 0$ lösen. Addition von 4 ergibt $x^2 = 4$. Diese Gleichung hat *zwei* Lösungen, nämlich $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$, denn es ist ja $2^2 = 4$ und $(-2)^2 = 4$.

Beim Rechnen gehen wir also so vor:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 && \mid +4 \\ x^2 &= 4 && \mid \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm 2 \end{aligned}$$

Beim Ziehen der Wurzel muss man beachten, dass quadratische Gleichungen $x^2 = a$ mit $a > 0$ zwei Lösungen haben, nämlich $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$.

Gleichungen der Form $ax^2 = b$ nennt man reinquadratische Gleichungen. Diese lassen sich alle wie oben lösen.

Übungen

(1) Welche der folgenden Gleichungen sind linear, welche sind quadratisch?

a) $2x - 1 = 0$ b) $x^2 = 1$
c) $x = 0$ d) $(x-1)(x+1) = 1$
e) $x^2(x-1) = 0$ f) $x^2 + 1 = x^2 + x$

(2) Löse die folgenden reinquadratischen Gleichungen.

a) $x^2 = 9$ b) $x^2 - 25 = 0$
c) $2x^2 - 72 = 0$ d) $3x^2 = 0{,}03$
e) $x^2 + 1 = 0$ f) $x^2 = 0{,}16$

Hinweis: Wenn eine Parabel, etwa $y = x^2 + 1$, keine Nullstelle hat, dann hat die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ auch keine Lösung.

Bei der Berechnung von Quadratwurzeln (etwa aus 0,16) ist es oft ratsam, die Zahl als Bruch zu schreiben:

$$\sqrt{0{,}16} = \sqrt{\frac{16}{100}} = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

(3) Löse die folgenden reinquadratischen Gleichungen.

a) $x^2 + 17x = 17x + 256$ b) $x = \frac{81}{x}$
c) $x^2 = 5$ d) $2x^2 = 1{,}28$
e) $(2x-1)^2 = 4$ f) $(1-x)^2 = 1$

(4) Löse die folgenden Gleichungen:

a) $(x+1)^2 = 2x+1$ b) $(x-3)^2 = 25-6x$

c) $(2x-1)^2 = (x-2)^2+9$ d) $(x-2)(x+2) = 5$

(5) Bestimme die Schnittpunkte der folgenden Geraden und Parabeln:

a) $y = 2x+3$ und $y = x^2+2x-1$

b) $y = 2x+1$ und $y = (x+1)^2 - \frac{1}{4}$

(6) Löse die folgenden Gleichungen.

a) $(x+1)^2 - x^2 = 5$ b) $(x+2)^2 - (x-2)^2 = 24$

c) $4x^2 - (2x+1)^2 = 7$ d) $(3x+1)^2 - (3x-1)^2 = 12$

4. Quadratische Gleichungen ohne konstantes Glied

Es gibt eine weitere Klasse quadratischer Gleichungen, die man ohne weiteres lösen kann, nämlich solche ohne konstantes Glied wie etwa $x^2-2x=0$. Schreibt man hier allerdings $x^2 = 2x$ und zieht die Wurzel, dann erhält man die Gleichungen $x = \pm\sqrt{2x}$, die zwar richtig sind, aber einem nicht weiterhelfen.

Die richtige Vorgehensweise bei solchen Gleichungen ist das Ausklammern:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 0 \\ x(x-2) &= 0. \end{aligned}$$

Ganz wichtig: Wenn man ausgeklammert hat, sollte man durch Ausmultiplizieren im Kopf prüfen, ob alles richtig ist; hier stimmt alles wegen $x \cdot x = x^2$ und $x \cdot (-2) = -2x$.

Was kann man nun für x einsetzen, damit die Gleichung stimmt? Offenbar wird bei $x_1 = 0$ der erste Faktor 0, und man hat $0 \cdot (0-2) = 0 \cdot (-2) = 0$. Also ist $x_1 = 0$ eine Lösung (bei quadratischen Gleichungen der Form $ax^2+bx = 0$ ist $x = 0$ natürlich immer eine Lösung). Man kann aber auch den zweiten Faktor zu 0 machen, indem man $x_2 = 2$ setzt, denn dann ist $2 \cdot (2-2) = 2 \cdot 0 = 0$. Andere Lösungen kann es nicht geben, denn ein Produkt zweier Zahlen kann nur dann 0 sein,

wenn einer der beiden Faktoren 0 ist.

$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad\qquad x - 2 = 0$$
$$x_2 = 2$$

Man beachte, dass man bei der Anwendung des Satzes vom Nullprodukt nicht das vordere x gleich 0 und gleichzeitig das hintere x gleich 2 setzt. In eine Gleichung kann man für x immer nur einen Wert einsetzen. Aber wenn man in beide Faktoren $x = 0$ setzt, ist das Produkt 0, und das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man in beide Faktoren $x = 2$ einsetzt.

Der Satz vom Nullprodukt. Man kann auch quadratische Gleichungen wie $x^2 - 4x + 3 = 0$ lösen, wenn man die linke Seite zerlegen kann: an

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-1)(x-3) = 0$$

kann man ablesen, dass $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ Lösungen der Gleichung sind. Die einzige Schwierigkeit ist, diese Zerlegung zu finden – darum werden wir uns später kümmern. Wenn die Zerlegung allerdings gegeben ist, dann ist das Ablesen der Lösungen kein Problem.

Übungen

(1) Löse die folgenden Gleichungen

a) $x^2 - 5x = 0$ b) $x^2 + x = 0$

c) $x(x+2) = 0$ d) $x^2 = 17x$

(2) Löse die folgenden Gleichungen

a) $x^2 = \sqrt{5} \cdot x$ b) $x^2 = ax$

c) $2x^2 - 5x = 0$ d) $3x^2 = 4x$

(3) Löse die folgenden Gleichungen

a) $x^3 - 2x^2 = 0$ b) $2x^3 + x^2 = 0$

c) $x^4 - 2x^2 = 0$ d) $x^4 + 3x^2 = 0$

(4) Löse die folgenden Gleichungen:

a) $(x-1)(x-5)=0$ b) $(x+1)(x-3)=0$
c) $(x+2)(x+13)=0$ d) $(x-3)(2x+5)=0$

(5) Löse die folgenden Gleichungen:

a) $x(x^2-4)=0$ b) $(x^2-2)(x^2+2)=0$
c) $(x-1)(x^2+1)=0$ d) $(2x-1)(3x^2-12)=0$

(6) Löse die folgenden Gleichungen:

a) $\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}=0$ b) $\frac{x^2}{5}=\frac{2x}{3}$
c) $\frac{2x^2}{3}+\frac{3x}{7}=0$ d) $134x^2-268x=0$

(7) Gib je eine quadratische Gleichung mit den Lösungen x_1 und x_2 an.

a) $x_1=0,\ x_2=1$ b) $x_1=3,\ x_2=-3$
c) $x_1=7,\ x_2=-4$ d) $x_1=-\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2}$
e) $x_1=2-\sqrt{3},\ x_2=2+\sqrt{3}$ f) $x_1=x_2=2$

5. Quadratische Ergänzung

Wie soll man nun eine Gleichung $x^2-4x+3=0$ so lösen, dass die Technik auch für andere quadratische Gleichungen funktioniert? Die Methode der quadratischen Ergänzung ist bereits 4000 Jahre alt: schon die Babylonier (aus Mesopotamien, im heutigen Irak) lösten 2000 v.Chr. quadratische Gleichungen mit Hilfe der quadratischen Ergänzung.

Die Idee dabei ist, den Term x^2-4x zu einer binomischen Formel zu ergänzen; dazu überlegt man sich, dass

$$(x-2)^2=x^2-4x+4$$

ist; dabei hat man 2 als die Hälfte von 4 zu nehmen. Jetzt rechnet man so:

$$\begin{aligned} x^2-4x+3&=0 && \mid +1\\ x^2-4x+4&=1 && \\ (x-2)^2&=1 && \mid \sqrt{\ }\\ x-2&=\pm 1 && \end{aligned}$$

Also ist entweder $x-2=-1$ und $x_1=1$, oder $x-2=1$ und damit $x_2=3$. Damit hat unsere Gleichung $x^2-4x+3=0$ dieselben Lösungen wie $(x-1)(x-3)=0$, und das ist kein Zufall: es ist nämlich

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3),$$

wie man durch Ausmultiplizieren leicht bestätigt.

Mit etwas Übung wird man zum Meister der quadratischen Ergänzung. Lösen wir die Gleichung $x^2+8x+15=0$. Die Hälfte von 8 ist 4, und es ist $(x+4)^2=x^2+8x+16$. Damit wir eine binomische Formel erhalten, müssen wir also 1 zur Ausgangsgleichung addieren:

$$\begin{aligned} x^2+8x+15&=0 && \mid +1\\ x^2+8x+16&=1 && \\ (x+4)^2&=1 && \mid \sqrt{}\\ x+4&=\pm 1 && \end{aligned}$$

und damit $x_1=-1-4=-5$ und $x_2=1-4=-3$.

An diesen Lösungen kann man ablesen, dass

$$x^2+8x+15=(x+5)(x+3)$$

sein muss, was man wieder durch Ausmultiplizieren bestätigt.

Übungen

(1) Löse die folgenden Gleichungen mit quadratischer Ergänzung:

a) $x^2-6x+8=0$ b) $x^2+12x+27=0$

c) $x^2+12x+32=0$ d) $x^2-4x-32=0$

(2) Löse die folgenden Gleichungen mit quadratischer Ergänzung:

a) $x^2-5x+6=0$ b) $x^2-13x+42=0$

c) $x^2-11x+30=0$ d) $x^2-x-20=0$

(3) Löse die folgenden Gleichungen einmal mit dem Satz vom Nullprodukt und ein zweites Mal mit quadratischer Ergänzung:

a) $x^2-2x=0$ b) $x^2+5x=0$

c) $x^2-16x=0$ d) $x^2+x=0$

(4) Löse die folgenden reinquadratischen Gleichungen einmal direkt und einmal durch Zerlegen mit der dritten binomischen Formel.

Beispiel: $x^2 - 4 = 0$ ergibt $(x-2)(x+2) = 0$, also $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

a) $x^2 - 25 = 0$ b) $x^2 = 169$

c) $x^2 - a^2 = 0$ d) $x^2 - 5 = 4$

(5) Zerlege die folgenden Ausdrücke in Faktoren, und zwar durch Berechnung der Nullstellen.

a) $x^2 - 5x + 6$ b) $y^2 - 8y + 12$

c) $z^2 + 2z - 8$ d) $x^2 + 8xy + 15y^2$

6. Satz von Vieta

Viele quadratische Gleichungen haben ganzzahlige Lösungen. In einem solchen Fall kann man diese oft mit wenig Aufwand erraten. Sind nämlich $x_1 = a$ und $x_2 = b$ die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, dann kann man, wie wir oben gesehen haben,

$$x^2 + px + q = (x-a)(x-b)$$

schreiben. Asumultiplizieren ergibt

$$x^2 + px + q = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab.$$

Dies zeigt, dass die beiden Gleichungen

$$-p = a + b \quad \text{und} \quad q = ab$$

gelten müssen.

Wenn also $x^2 - 6x + 8 = 0$ ganzzahlige Lösungen $x_1 = a$ und $x_2 = b$ besitzt, dann muss

$$ab = 8 \quad \text{und} \quad a + b = 6$$

gelten. Die einzigen Zerlegungen von 8 in ganzzahlige Faktoren sind, bis auf das Vorzeichen,

$$ab = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4.$$

Nur bei der zweiten Zerlegung ist auch $a + b = 6$. Also ist $a = 2$ und $b = 4$, d.h.

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4),$$

was man leicht durch Ausmultiplizieren bestätigt. Damit sind $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$ die Lösungen der Gleichung.

Wer den Satz von Vieta übt und flüssig anwenden kann, wird bei vielen Aufgaben, in denen eine quadratische Gleichung zu lösen ist, viel Zeit sparen.

(1) Löse die folgenden quadratischen Gleichungen mit dem Satz von Vieta.

a) $x^2 - 11x + 30 = 0$ b) $x^2 - 11x + 18 = 0$
c) $x^2 - 11x + 28 = 0$ d) $x^2 - 7x + 6 = 0$
e) $x^2 - 15x + 56 = 0$ f) $x^2 - 16x + 63 = 0$

(2) Löse die folgenden quadratischen Gleichungen mit dem Satz von Vieta.

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 - 5x + 6 = 0$
c) $x^2 - 13x + 42 = 0$ d) $x^2 - 11x + 30 = 0$
e) $x^2 - 14x + 49 = 0$ f) $x^2 - 12x + 35 = 0$

(3) Löse die folgenden quadratischen Gleichungen mit dem Satz von Vieta.

a) $x^2 + 11x + 30 = 0$ b) $x^2 + 12x + 27 = 0$
c) $x^2 + 12x + 32 = 0$ d) $x^2 + 12x + 27 = 0$
e) $x^2 + 10x + 21 = 0$ f) $x^2 + 11x + 28 = 0$

(4) Löse die folgenden quadratischen Gleichungen mit dem Satz von Vieta.

a) $x^2 - x - 20 = 0$ b) $x^2 + 3x - 28 = 0$
c) $x^2 - 4x - 32 = 0$ d) $x^2 - x - 42 = 0$
e) $x^2 - x - 56 = 0$ f) $x^2 - x - 56 = 0$

(5) Löse die folgenden quadratischen Gleichungen mit dem Satz von Vieta.

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$ b) $x^2 - 3x - 28 = 0$
c) $x^2 - 7x - 18 = 0$ d) $x^2 + 4x - 12 = 0$
e) $x^2 - 3x - 54 = 0$ f) $x^2 - 2x - 3 = 0$

(6) Löse die folgenden Gleichungen mit dem Satz von Vieta.

a) $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$ b) $x^4 - 17x^2 + 72 = 0$
c) $x^4 - 10x^2 + 21$ d) $x^4 + 3x^2 - 18 = 0$
e) $x^6 - 8x^3 - 9 = 0$ f) $x^4 + 3x^2 - 40 = 0$

7. Quadratische Ergänzung

Wir haben die Technik der quadratischen Ergänzung bisher nur auf relativ einfache Beispiele angewandt, insbesondere nur auf Gleichungen

der Form $x^2 + px + q = 0$. Jetzt wollen wir zeigen, wie man sie auf Gleichungen anwendet, in denen der Koeffzient von x^2 nicht unbedingt 1 ist.

Betrachten wir dazu die Gleichung

$$2x^2 + 3x - 5 = 0.$$

Die einfachste Möglichkeit besteht nun darin, durch Division durch 2 den Koeffizienten von x^2 zu 1 zu machen:

$$\begin{aligned}
2x^2 + 3x - 5 &= 0 && \Big| \ :2 \\
x^2 + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{5}{2} &= 0 \\
(x + \tfrac{3}{4})^2 - \tfrac{9}{16} - \tfrac{5}{2} &= 0 \\
(x + \tfrac{3}{4})^2 - \tfrac{9}{16} - \tfrac{40}{16} &= 0 \\
(x + \tfrac{3}{4})^2 - \tfrac{49}{16} &= 0 && \Big| \ + \tfrac{49}{16} \\
(x + \tfrac{3}{4})^2 &= \tfrac{49}{16} && \Big| \ \sqrt{} \\
x + \tfrac{3}{4} &= \pm\tfrac{7}{4}
\end{aligned}$$

Also ist

$$x_1 = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{2}.$$

Man beachte, dass $(x-1)(x-\frac{5}{2})$ hier nicht gleich $2x^2+3x-5$ ist, weil der Koeffizient von x^2 einmal 1 und das andere Mal 2 ist. Dagegen ist

$$2x^2 + 3x - 5 = 2(x-1)(x-\tfrac{5}{2}) = (x-1)(2x-5),$$

wobei wir die 2 in den zweiten Faktor gezogen haben, um ganzzahlige Koeffizienten zu bekommen.

(1) Löse die folgenden Gleichungen mit quadratischer Ergänzung.

a) $2x^2 + x - 6 = 0$ b) $3x^2 + x - 2 = 0$

c) $6x^2 - 5x - 6 = 0$ d) $9x^2 - 9x + 2 = 0$

(2) Zerlege die folgenden Ausdrücke durch die Berechnung der Nullstellen:

a) $2x^2 - 9x - 5$ b) $4x^2 - 13x + 3$

c) $2x^2 + x - 21$ d) $2x^2 + 7xy - 15y^2$

8. Die p-q-Formel

Jetzt ist es an der Zeit, Formeln für die Lösung quadratischer Gleichungen herzuleiten. Wir beginnen mit der p-q-Formel, die sich ein klein wenig leichter erklären lässt.

Sei also $x^2 + px + q = 0$ eine quadratische Gleichung. Wir werden sie mit quadratischer Ergänzung lösen:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 && \Big| -q \\ x^2 + px &= -q && +\tfrac{p^2}{4} \\ x^2 + 2 \cdot \tfrac{p}{2}x + \tfrac{p^2}{4} &= \tfrac{p^2}{4} - q \\ (x + \tfrac{p}{2})^2 &= \tfrac{p^2}{4} - q \end{aligned}$$

Falls $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ ist, können wir die Wurzel ziehen:

$$x + \tfrac{p}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{p^2}{4} - q} \qquad \Big| -\tfrac{p}{2}$$

und erhalten die Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Damit kann man jetzt die Lösungen jeder quadratischen Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ bestimmen.

Betrachten wir zuerst die Gleichung $x^2 + 5x + 4 = 0$. Hier ist $p = 5$ und $q = 4$, also

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2},$$

also

$$x_1 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -4 \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1.$$

Ist $x^2 - 3x + 1 = 0$ zu lösen, so liest man $p = -3$ und $q = 1$ ab und setzt diese in die p-q-Formel ein:

$$x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

(1) Löse die folgenden Gleichungen mit dem Satz von Vieta und mit der p-q-Formel.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ b) $x^2 - 3x - 10 = 0$

c) $x^2 - 6x + 7 = 0$ d) $x^2 - 8x + 12 = 0$

9. Die a-b-c-Formel

Im letzten Abschnitt lösen wir die allgemeine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Dazu könnten wir durch $a \neq 0$ dividieren und die p-q-Formel benutzen, allerdings muss man dann mit vielen Bruchtermen kämpfen. Bei der quadratischen Ergänzung kann man Brüche vermeiden, wenn man die Gleichung mit $4a$ multipliziert:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 && \Big| \cdot 4a \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 && \Big| + b^2 - 4ac \\ (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac && \Big| \sqrt{} \end{aligned}$$

Falls $b^2 - 4ac \geq 0$ ist, können wir die Wurzel ziehen:

$$\begin{aligned} 2ax + b &= \pm\sqrt{b^2 - 4ac} && \Big| - b \\ 2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \end{aligned}$$

Nach Division durch $2a$ (dies geht nur für $a \neq 0$, wenn also wirklich eine quadratische Gleichung vorliegt) erhalten wir

> **Die a-b-c-Formel.** Die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind
>
> $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$
>
> falls $b^2 - 4ac \geq 0$ ist. Im Falle $b^2 - 4ac < 0$ hat die Gleichung keine reellen Lösungen.

die Zahl $D = b^2 - 4ac$ heißt die **Diskriminante** der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Sie sagt uns, wie viele Lösungen die Gleichung besitzt:

- Ist $b^2 - 4ac > 0$, dann hat die Gleichung **zwei** verschiedene Lösungen.
- Ist $b^2 - 4ac = 0$, dann hat die Gleichung genau **eine** Lösung.
- Ist $b^2 - 4ac < 0$, dann hat die Gleichung **keine** Lösung.

Diesen Satz kann man auch geometrisch formulieren: Die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ schneidet die x-Achse

- in zwei verschiedenen Punkten, wenn $b^2 - 4ac > 0$ ist,
- in einem Punkt, wenn $b^2 - 4ac = 0$ ist, und
- gar nicht, wenn $b^2 - 4ac < 0$ ist.

10. Übungen

(1) Welche der folgenden Gleichungen haben $x = 1$ als Lösung?

a) $x^2 = 1$ b) $3x^2 + 4x - 7 = 0$
c) $-x^2 - 2x + 1 = 0$ d) $(x-2)(x-1) = 0$
e) $(2x+1)(x-1) = 1$ f) $\sqrt{x} = 1$

(2) Löse mit Hilfe der a-b-c-Formel:

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$ b) $x^2 + 5x + 4 = 0$
c) $x^2 - 5x + 6 = 0$ d) $x^2 + 5x + 6 = 0$

(3) Löse mit Hilfe der a-b-c-Formel:

a) $x^2 - 5x + 3 = 0$ b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$
c) $-x^2 - 2x + 8 = 0$ d) $3x^2 + 5x - 2$

(4) Löse mit Hilfe der a-b-c-Formel:

a) $\frac{x^2}{6} - \frac{x}{6} = 1$ b) $\frac{t^2}{2} - \frac{17x}{6} = 1$
c) $x^2 - \sqrt{5} \cdot x + 1 = 0$ d) $x^2 - \sqrt{3} \cdot x + 2 = 0$

(5) Bestimme k so, dass $x = 2$ eine Lösung der folgenden Gleichungen ist.

a) $x^2 - kx = 4$ b) $x^2 - (k-1)x - 1 = 0$
c) $(x-k)^2 = 0$ d) $k^2 - 2kx + 1 = 0$

(6) Löse möglichst geschickt:

a) $x^2 - 16 = 0$ b) $x^2 - 7x + 12 = 0$
c) $x^2 = 17x$ d) $\frac{1}{x} = \frac{x}{2}$
e) $x - 1 = \frac{1}{x-1}$ f) $x^2 - \sqrt{5} \cdot x = 0$

(7) Gib zu jeder der folgenden Aussagen ein Gegenbeispiel an.

a) Jede quadratische Gleichung hat genau zwei Lösungen.

b) Jede lineare Gleichung hat genau eine Lösung.

c) Eine quadratische Gleichung kann nicht genau eine Lösung haben.

d) Wenn $x_1 = 1$ Lösung einer quadratischen Gleichung ist, dann ist $x_2 = -1$ ebenfalls Lösung dieser Gleichung.

e) Wenn a, b und c positive Zahlen sind, dann besitzt die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ keine Nullstellen.

(8) Gegeben ist ein Rechteck mit den Seiten a und b und einem Umfang von 24 m. Verlängert man eine Seite um 1 m und verkürzt die andere um 1 m, dann nimmt der Flächeninhalt um 1 m^2 zu.

Bestimme a und b.

11. Substitution

Wir wollen uns nun zwei Methoden zur Lösung der biquadratischen Gleichung

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

ansehen. Mit der Technik von Vieta geht es ganz schnell:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$

liefert mit dem Satz vom Nullprodukt $x^2 = 1$ und $x_{1,2} = \pm 1$, sowie $x^2 = 4$ und $x_{3,4} = \pm 2$.

Die zweite Methode (Substitution) funktioniert auch, wenn die Gleichung keine ganzzahligen Lösungen hat. Der Trick dabei ist, die Gleichung in eine quadratische zu verwandeln, indem man die Abkürzung $z = x^2$ (dies nennt man Substitution, also Ersetzung; man ersetzt x^2 durch z) einführt. Damit ist dann $z^2 = x^2 \cdot x^2 = x^4$, und aus der Gleichung

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \text{wird} \quad z^2 - 5z + 4 = 0.$$

Anwendung der a-b-c-Formel liefert $z_1 = 1$ und $z_2 = 4$ als Lösung. Aber z war nur die Abkürzung für x^2, also ist $x^2 = 1$ oder $x^2 = 4$. Wurzelziehen ergibt wie oben $_{1,2} = \pm 1$ und $x_{3,4} = \pm 2$.

Das nächste Beispiel zeigt, wie man Substitution auch in anderen Fällen einsetzen kann:

$$(2x^2 - 1)^2 - 8(2x^2 - 1) + 7 = 0.$$

Auflösen der Klammern (Achtung: $(2\mathrm{x}^2)^2 = 2x^2 \cdot 2x^2 = 4x^4$), Zusammenfassen und Vereinfachen liefert

$$\begin{aligned} 4x^4 - 4x^2 + 1 - 16x^2 + 8 + 7 &= 0 \\ 4x^4 - 20x^2 + 16 &= 0 && \Big| : 4 \\ x^4 - 5x^2 + 4 &= 0 && \text{Vieta} \\ (x^2-1)(x^2-4) &= 0 \end{aligned}$$

und der Nullproduktsatz liefert $x_{1,2} = \pm 1$ und $x_{3,4} = \pm 2$.

Eine zweite Lösungsmöglichkeit tut sich denjenigen auf, die bemerken, dass der Term $2x^2 - 1$ zweimal vorkommt (dazu muss man sich die Zeit nehmen, die Gleichung erst einmal anzusehen, bevor man drauf los rechnet). Die legt nahe, $z = 2x^2 - 1$ zu substituieren; man erhält dann

$$z^2 - 8z + 7 = 0.$$

Mit Vieta wird daraus $(z-1)(z-7) = 0$, also $z_1 = 1$ und $z_2 = 7$. Nun war aber $z = 2x^2 - 1$, also haben wir die beiden Gleichungen

$$2x^2 - 1 = 1 \quad \text{und} \quad 2x^2 - 1 = 7.$$

Addition von 1 und Division durch 2 liefert

$$x^2 = 1 \quad \text{und} \quad x^2 = 4,$$

also $x_{1,2} = \pm 1$ und $x_{3,4} = \pm 2$ wie oben.

(1) Löse die folgenden Gleichungen.

a) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ b) $x^4 + 2x^2 = 15$

c) $x^4 = 17x^2$ d) $x^4 = 16$

(2) Löse die folgenden Gleichungen.

a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ b) $2x^4 + 7x^2 = 4$

c) $2x^4 - 7x^2 = 15$ d) $x^4 = 4$

12. Vermischte Aufgaben

Bei der Lösung er folgenden Gleichungen kann man einige grundsätzliche Dinge immer machen, wenn man nicht sofort sieht, wie man sie löst. Dazu gehört das Wegschaffen der Nenner oder das Zusammenfassen von Termen, gegebenfalls auch die Division durch eine Zahl, wenn alle Terme durch diese teilbar sind.

Generell kommt man mit dem folgenden Schema fast immer ans Ziel:

- Taucht x in der Gleichung nur einmal auf, wird nach diesem x aufgelöst, und zwar erst durch Addition und Subtraktion, dann durch Multiplikation und Division, und zum Schluss eventuell durch Wurzelziehen etc.
- Taucht x zweimal auf, bringt man alles auf eine Seite und schafft die Nenner weg. Danach:
  - Ausklammern oder Substitution nebst a-b-c-Formel.

Es ist sehr empfehlenswert, nicht alle Gleichungen $x^2 + px + q = 0$ mit der a-b-c-Formel zu lösen, sondern regelmäßig auch den Satz von Vieta und die quadratische Ergänzung anzuwenden.

(1) Löse die folgenden Gleichungen.

a) $x^2 - 8 = 0$ b) $x^2 + 17x = 0$

c) $x^2 - 6x + 8 = 0$ d) $2x - 3x = 4$

(2) Löse die folgenden Gleichungen.

a) $2x^2 - 5x + 7 = 0$ b) $3x - x^2 = 2$

c) $(x + 4)(x^2 - 4) = 0$ d) $x^3 - 5x^2 = 0$

(3) Löse die folgenden Gleichungen.

a) $\frac{5x}{6} - \frac{1}{6} = x^2$ b) $x(x^2 - \frac{4}{9}) = 0$

c) $z^2 - 14z + 33 = 0$ d) $x^2 + 16 = 0$

(4) Löse die folgenden Gleichungen.

a) $5x^2 - 8x + 1 = 0$ b) $3x^2 + x + 1 = 0$

c) $2x - 3x^2 + 8 = 0$ d) $x(x - 17) = 0$

(5) Löse die folgenden Gleichungen.

a) $6x = 5x$ b) $4x^2 = 5x^2$

c) $3x - 2x^2 = 0$ d) $x^3 = 7x^2$