GEOMETRISCHE FOLGEN UND REIHEN

F. LEMMERMEYER

(1) Schreibe die folgenden periodischen Dezimalzahlen als Brüche:

(a) $0,555555\ldots$;

(b) $0,12121212\ldots$;

(c) $5,41414141\ldots$.

(2) Seien 1 und q die ersten beiden Glieder einer geometrischen Folge. Wir lautet das vierte Glied?

(3) Die Zahlen 6, x und 24 sind die ersten drei Glieder einer geometrischen Folge. Bestimme die möglichen Werte für x.

(4) x, 4 und $x-6$ sind die ersten drei Glieder einer geometrischen Folge. Bestimme x und das vierte Glied.

(5) Die ersten drei Glieder einer geometrischen Folge sind x, $x-6$ und $x-10$. Bestimme x.

(6) Bestimme die Summe

$$S = 4 = 4 + 8 + 16 + \ldots + 128.$$

(7) Erkläre, wie man die unendliche Reihe

$$S = 1 + q + q^2 + \ldots$$

bestimmen kann.

(8) Bestimme

$$s = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots$$

auf zwei verschiedene Arten.

(9) Bestimme die folgenden Summen.

(a) $S = q^2 + q^3 + \ldots + q^n$;

(b) $T = q + q^3 + q^5 + \ldots + q^{17}$;

(c) $U = 1 - q + q^2 - q^3 + \ldots + q^{12}$.

(10) Zwei Schachspieler spielen gegeneinander, bis einer der beiden gewinnt. Spieler A gewinnt mit $p = \frac{1}{4}$ und verliert mit $q = \frac{1}{5}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A das Match?

Wie viele Partien sind bis zur Entscheidung zu erwarten?

(11) Bei einer verbeulten Münze erscheint mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{3}{5}$ Kopf. Wie oft muss man im Schnitt werfen, bis Kopf erscheint?

Lösungen

(1) (a) Sei $q = 0,555555\ldots$; dann ist $10q = 5,55555\ldots$, also $9q = 10q - q = 5$ und somit $q = \frac{5}{9}$.

(b) Sei $r = 0,12121212\ldots$; dann ist $100r - r = 12$, also $r = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$.

(c) Sei $s = 5,41414141\ldots$; dann ist $100s - s = 536$, also $s = \frac{536}{99}$.

(2) Es ist $a_1 = 1$ und $a_2 = a$. Der gemeinsame Faktor ist daher a, folglich ist $a_3 = a^2$ und $a_4 = a^3$.

(3) Es ist $a_1 = 6$, $a_2 = x = 6q$ und $a_3 = 24 = 6q^2$. Die letzte Gleichung liefert $q^2 = 4$, also $q = \pm 2$. Die möglichen Werte für x sind also -12 und 12.

(4) Aus $a_1 = x$, $a_2 = xq = 4$ und $a_3 = xq^2 = x - 6$ folgt $q = a_2/a_1 = \frac{4}{x}$ (x kann nicht 0 sein, denn sonst besteht die ganze Folge aus Nullen) und daher $x - 6 = 4q = \frac{16}{x}$. Dies führt auf die quadratische Gleichung $x^2 - 6x - 16 = 0$, also $(x-8)(x+2) = 0$ und damit $x_1 = -2$, $x_2 = 8$. Die geometrischen Folgen sind in diesen Fällen

- $-2,\ 4,\ -8,\ -16,\ 32,\ \ldots$
- $8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \ldots$.

(5) Es ist $x - 6 = qx$ und $x - 10 = xq^2$. Aus der ersten Gleichung folgt $q = \frac{x-6}{x}$ (auch hier kann nicht $x = 0$ sein), aus der zweiten

$$x - 10 = xq^2 = x \cdot \left(\frac{x-6}{x}\right)^2 = \frac{(x-6)^2}{x}.$$

Dies liefert $x^2 - 10x = x^2 - 12x + 36$, also $x = 18$.

(6) Es ist $2S = 8 + 16 + \ldots + 128 + 256$, also $2S - S = S = 256 - 4 = 252$.

(7) Wir finden

(a) $qS = q^3 + q^4 + \ldots + q^{n+1}$, also $qS - S = q^{n+1} - q^2$ und damit

$$S = \frac{q^{n+1} - q^2}{q - 1}.$$

(b) $q^2T = q^3 + \ldots + q^{19}$ und $q^2T - T = q^{19} - q$, also
$$T = \frac{q^{19} - q}{q^2 - 1}.$$

(c) Hier ist $qU = q - q^2 + \ldots + q^{13}$, also (Aufpassen, hier muss man addieren oder gleich U mit $-q$ multiplizieren) $qT + T = 1 + q^{13}$, somit
$$U = \frac{q^{13} + 1}{q + 1}.$$

(8) Am einfachsten ist es,
$$qS = q + q^2 + q^3 + \ldots$$
von S zu subtrahieren; damit folgt $qS - S = 1$, also
$$S = \frac{1}{1 - q}.$$

Eine andere Möglichkeit:
$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = 1 + q(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) = 1 + qS$$
und daraus wieder $S = \frac{1}{1-q}$.

(9) Multiplikation mit q und Subtraktion ergibt
$$s - qs = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1 - q},$$
woraus durch Ausklammern von s und Division durch $1-q$ folgt
$$S = \frac{1}{(1 - q)^2}.$$
Hierbei muss q echt zwischen -1 und 1 liegen.

Eine zweite Möglichkeit: Es ist $s(q) = S'(q)$ für
$$S(q) = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots = \frac{1}{1 - q}.$$
Ableiten ergibt $s(q) = 1/(1 - q)^2$ wie oben.

Fügt man die 1 in der Stammfunktion nicht hinzu, folgt
$$S(q) = q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots = \frac{1}{1 - q} - 1,$$
was beim Ableiten dasselbe Ergebnis liefert.

(10) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit des Gewinns von A ist mit $r = 1 - p - q$

$$\begin{aligned} p(A \text{ gew.}) &= p(G) + p(RG) + p(RRG) + p(RRRG) + \ldots \\ &= p + rp + r^2p + r^3p + \ldots \\ &= p(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots) = \frac{p}{1-r} \\ &= \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{4}} = \frac{4}{11}. \end{aligned}$$

Weil die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$ ist, erwartet man im Schnitt $\frac{20}{9}$ Partien. Wir rechnen das nach; dabei stehe N für nicht remis, und es ist $n = p(N) = \frac{9}{20}$.

N	1	2	3	4	$\ldots$
p	n	$(1-n)n$	$(1-n)^2n$	$(1-n)^3n$	$\ldots$

Damit ist

$$\begin{aligned} E(N) &= n + 2n(1-n) + 3n(1-n)^2 + 4n(1-n)^3 + \cdots \\ &= n(1 + 2(1-n) + 3(1-n)^2 + 4(1-n)^3 + \ldots) \\ &= \frac{n}{(1-(1-n))^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = \frac{20}{9} \end{aligned}$$

wie erwartet.

(11) Man erwartet, dass man im Schnitt $\frac{5}{3}$ mal werfen muss. Die Rechnung läuft so:

N	1	2	3	4	$\ldots$
p	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	$\ldots$

Also $E(N) = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} = \frac{5}{3}$ wie erwartet.