MATHEMATIK BASISFACH, DELTA

FRANZ LEMMERMEYER

Der Buchner Verlag hat mir diese Woche eine Leseprobe ihres für 2020 angekündigten Buchs für das Basisfach Mathematik zugeschickt, das seit 2019 unterrichtet wird. Bei neuen Büchern, das habe ich bei den 10 Reformen der letzten 12 Jahre gelernt, ist ein bedächtiges Vorgehen gut, weil neue Bücher, die schnell einer neuen Reform hinterhergeworfen werden, in der Regel vor Fehlern nur so strotzen. Und weil mir die erste Aufgabe, die ich gesehen habe, verdächtig vorkam, habe ich sie durchgerechnet. Und mich gewundert. Und den Rest auch noch angesehen.

Wer starke Nerven hat, darf mir jetzt auf dem Weg in das Wunderland der neuen Mathematik-Schulbücher folgen. Aber nur im Sitzen.

Die Aufgabe, die mir die Lektüre der Leseprobe nahelegte, war die folgende (Seite 6 der Leseprobe, Seite 38 im Buch).

1 Gegeben ist die Funktion f mit p: $y = \sqrt{x+2}\,(x-4)$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an und erläutern Sie dies.

b) Bestimmen Sie die Nullstelle(n) des Graphen von f sowie seine Extremstelle(n).

c) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitung von f. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

d) Bestimmen Sie die Stelle, an der der Graph von f parallel zur Geraden $y = x + 4$ verläuft.

e) Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Über einem Intervall streng monoton steigende Funktionen können in der ersten Ableitung in diesem Intervall keine Nullstelle haben."

f) Entscheiden Sie begründet, welcher der abgebildeten Graphen der Graph der Ableitungsfunktion von f ist.

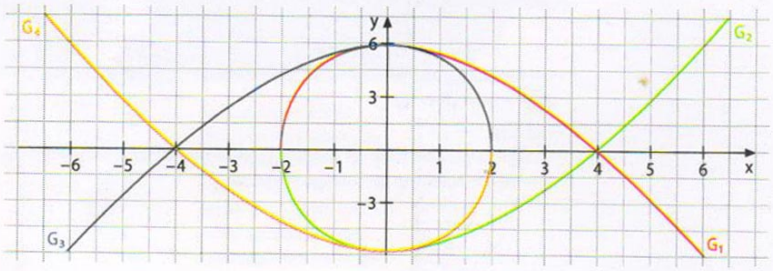


Abbildung 1. Aufgabe zur Klausurvorbereitung

Gegeben ist die Funktion f mit $p : y = \sqrt{x+2}(x-4)$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an und erläutern Sie dies.

b) Bestimmen Sie die Nullstelle(n) des Graphen von f sowie seine Extremstellen.

c) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitung von f. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

d) Bestimmen Sie die Stelle, an der der Graph von f parallel zur Geraden $y = x + 4$ verläuft.

e) Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Über einem Intervall streng monoton steigende Funktionen können in der ersten Ableitung keine Nullstellen haben.“

f) Entscheiden Sie begründet, welcher der abgebildeten Graphen der Graph der Ableitungsfunktion von f ist.

Lösung.

Bereits die erste Zeile ist offenkundig Unsinn. Heißt die Funktion jetzt f oder p?

a) Die Bestimmung des maximalen Definitionsbereichs ist sicherlich kein Problem für den 3-stündigen Basiskurs, wenn das Thema seit 2004 für den 4-stündigen Kurs auf erhöhtem Niveau zu schwer war.

   Sei's drum: $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}$.

b) Nullstelle(n) ist kein Problem: Der Satz vom Nullprodukt ergibt $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$.

   Für die Extremstellen braucht man $f'(x)$. Wir finden

$$f'(x) = \frac{x-4}{2\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2}.$$

   Nullsetzen und Wegschaffen des Nenners liefert

$$0 = x - 4 + 2(x+2) = 3x, \quad \text{also} \quad x_1 = 0.$$

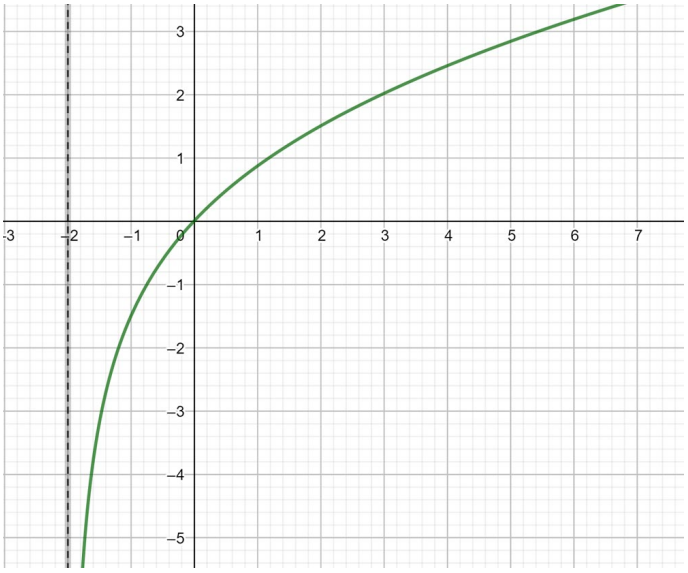
   Um nachzurechnen, dass es sich um eine Extremstelle handelt, braucht man entweder die zweite Ableitung (die kommt aber

erst im dritten Kapitel), oder man vereinfacht $f'(x)$ durch Bilden des Hauptnenners zu

$$f'(x) = \frac{3x}{2\sqrt{x+2}}.$$

Offenbar liegt (auch für Schüler des Basisfachs) eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel vor, nämlich von $-$ nach $+$. Also haben wir einen Tiefpunkt.

c) Man lässt den Taschenrechner eine Wertetabelle machen, nimmt Papier und Stift in die Hand (Rechtshänder in die rechte, Linkshänder in die linke) und zeichnet (reicht das als Beschreibung der Vorgehensweise?):



d) Hier muss man offenbar die Gleichung $f'(x) = 1$ lösen. Aus $3x = 2\sqrt{x+2}$ erhält man nach Quadrieren die quadratische Gleichung $9x^2 - 4x - 8 = 0$, welche die beiden Lösungen $x_1 \approx -0,75$ und $x_2 \approx 1,19$ besitzt. Weil man eine Wurzelgleichung durch Quadrieren gelöst hat, muss man die Probe machen; ein Blick auf das Schaubild der Ableitung zeigt, dass nur x_2 eine Lösung der Gleichung $f'(x) = 1$ ist.

e) Meine Stellungnahme wäre, dass das hochgradiger fachsprachlicher Unsinn ist. Die Aussage, eine Funktion habe in der Ableitung eine Nullstelle, hat man vor 2019 in keinem einzigen Mathematikbuch finden können. Zu recht: hier steht ja, dass die Funktion f eine Nullstelle hat, und zwar in der Ableitung.

Das ist ähnlich sinnvoll wie die Behauptung, die Funktion f habe eine Nullstelle, und zwar in Frankreich.

Gemeint ist natürlich folgende Aussage: „Ist f eine auf einem Intervall streng monoton steigende Funktion, dann hat f' in diesem Intervall keine Nullstelle.“ Dies ist eine Aussage, und sie ist falsch: Die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton steigend, aber die Ableitung $f'(x) = 3x^2$ hat eine Nullstelle.

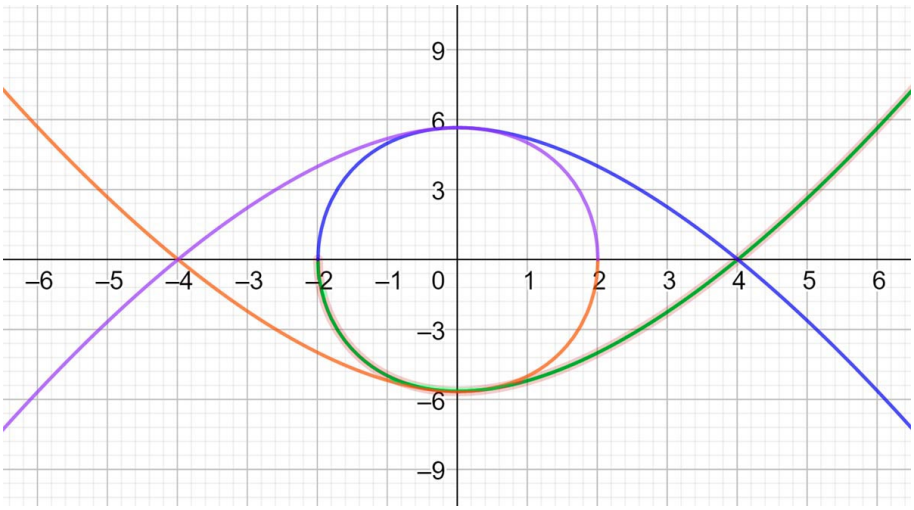
Die Monotonie von $f(x) = x^3$ könnte man nachrechnen, wenn Monotonie eine Definition hätte und wenn die Schüler wüssten, wie man mit einfachen Ungleichungen umgeht. Weil das nicht der Fall ist, wird Monotonie über die Ableitung erklärt, d.h. eine Funktion wird als streng monoton steigend bezeichnet, wenn ihre Ableitung positiv ist. Im Buch heißt es dazu auf S. 12:

- In Intervallen, in denen $f'(x) > 0$ ist, ist f streng monoton steigend.
- In Intervallen, in denen $f'(x) < 0$ ist, ist f streng monoton fallend.

Mehr steht dazu nicht da; insbesondere erfährt man nichts darüber, ob das jetzt ein Satz oder eine Definition ist. Wäre es eine Definition, müssten die Bedingungen nach üblichem Sprachgebrauch notwendig und hinreichend sein. Für Schüler des Basiskurses ist es sicherlich kein Problem zu glauben, dass der Zusammenhang zwischen Monotonie von f und dem Vorzeichen der ersten Ableitung f' manchmal stimmt und manchmal nicht.

f) Wieso lässt man die Schüler in c) die Ableitung zeichnen und fragt dann in e), welche der gegebenen Schaubilder zu f' gehört? Die Antwort ist einfach: Weil keines der Schaubilder die Ableitung f' zeigt. Vielmehr geht es hier nicht um die Ableitungsfunktion, sondern um die Funktion f selbst. Wie man schnell sieht, ist der grüne Graph derjenige von f.

Dass der Graph von f und die an x- und y-Achsen gespiegelten Graphen nicht durch die Punkte $(0|\pm 6)$ gehen, sieht man mithilfe von geogebra besser:



Jetzt hat mich doch interessiert, warum hier ein Verlag Harakiri begeht, indem er mit einer Leseprobe Werbung für ein Buch macht, dem offenkundig ein Lektor gefehlt hat. Ich habe also weitergelesen.

Das Buch beginnt auf S. 8. mit folgendem Einstieg:

> *In diesem Kapitel wollen wir die Arbeitsweise eines Mathematikers simulieren. Die Phänomene, mit denen wir uns beschäftigen, sind einerseits Terme, andererseits ihre zugehörigen Graphen mit ihren Eigenschaften wir Extrempunkte oder Monotonieverhalten. Wir gehen dabei so vor, dass wir Terme auf verschiedene Arten miteinander kombinieren.*

Wenn Leute versprechen, die Arbeitsweise eines Mathematikers simulieren zu wollen, kommt meist Quark dabei raus. Die Autoren bilden hier keine Ausnahme. Schuster bleib bei deinen Leisten, möchte man ihnen da zurufen, wüsste man nicht genau, dass sie das Sprichwort gar nicht verstehen.

Von Termen und ihren zugehörigen Graphen blafaseln die Autoren. Wie sieht der Graph des Terms $2abc$ aus? Ich wüsste noch nicht einmal, wie der Graph von 1 oder x aussieht. Ich wusste bisher auch nicht, dass Extrempunkte Eigenschaften von Graphen sind.

Das Kombinieren von Termen ist eine Marotte der Autoren. Das treibt Blüten, könnte man sagen, wäre das Ergebnis nicht eine mathematische Katastrophe. Der Anfang geht noch:

> *In einem ersten Schritt kombinieren wir Terme, indem wir sie additiv miteinander verknüpfen.*

Vermutlich verstehen Schüler besser, wie man Dinge addiert, wenn man statt addieren „additiv miteinnander verknüpfen sagt“. Ich habe das noch nie ausprobiert.

> *In einem zweiten Schritt kombinieren wir Terme, indem wir sie multiplikativ miteinander verknüpfen.*

Ob Quotienten erlaubt sind, weiß ich nicht. Müsste man, um Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ zu bekommen, nicht auch irgendwie etwas dividieren? Oder ist das nur nicht Teil der Simulation der Arbeitsweise eines Mathematikers? Und wie sieht es mit der subtraktiven Verknüpfung aus? Geben tut es die jedenfalls:

Verstehen Bisher haben wir vor allem ganzrationale Funktionen, z. B. f mit $f(x) = x^3 + 2x - 1$, betrachtet; in ihnen sind Termbausteine (hier x^3, $2x$ und 1) entweder additiv oder subtraktiv verknüpft.

> *In einem dritten Schritt kombinieren wir Terme, indem wir sie verketten. Dabei entsteht eine innere und eine äußere Funktion.*

Leider erklären uns die Autoren nicht, wie man die Terme $2ab$ und $c+d$ verkettet, und was dabei die innere und die äußere Funktion sein soll.

> *In einem vierten Schritt nehmen wir den Sinus und Kosinus hinzu und kombinieren sie mit linearen Termen.*

Sie werden jetzt also nicht mehr mit linearen Termen verknüpft oder verkettet, sondern kombiniert. Ist das etwas anderes? Ist es wichtig? Und warum können wir sie nicht mit quadratischen Termen kombinieren? Ich vermute, das liegt daran, dass die Schüler des Basisfachs Mathematik dafür zu doof sind.

Wie man Funktionen (oder deren Schaubilder, so genau weiß man das nicht) auf Symmetrie untersucht, steht auf S. 10. Im wesentlichen geht es dabei um Potenzfunktionen, und die sind so definiert:

> *Potenzfunktionen haben die Funktionsgleichung $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Q}$,*

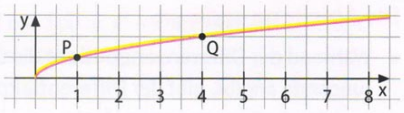
Aha. Ist wohl besser so. Zahlen mit mehr als 10 Nachkommastellen kann es nicht geben, weil die in keinen Taschenrechner passen. Der Herr Professor Mückenheim aus Augsburg würde das begrüßen. Anderswo haben Potenzfunktionen übrigens die Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^r$. Auf S. 11 geht es weiter:

> *Da der Funktionsterm sowohl gerade als auch ungerade Exponenten enthält, liegt keine Symmetrie vor.*

Amen. So steht es geschrieben. Merke: Usprungsgeraden sind zwar punkt-, aber nicht achsensymmetrisch; Parabeln sind nur dann achsensymmetrisch, wenn sie die Gleichung $y = ax^2 + c$ haben. Das ist sicherlich wichtig, wenn man Aufgabe 23 auf S. 25 löst, wo man das Schaubild von $f(x) = (x+2)^2 + (x-1)^2$ auf Symmetrie zu untersuchen hat.

Bereits im nächsten Satz werden nur noch solche Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Q}$ betrachtet, bei denen n gerade oder ungerade ist. Die allererste Aufgabe nach der Behandlung von $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Q}$, bei dem n gerade oder ungerade ist, ist dann die folgende:

1 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion, deren Gleichung die Form $y = a \cdot x^r$ hat. Welche Aussagen können Sie ohne Rechnung über a und r machen?



Bestimmen Sie die Parameter a und r anhand der gegebenen Punkte P (1 | 0,5) und Q (4 | 1).

Lösung: *r muss eine Bruchzahl sein, denn der Graph ist offensichtlich der einer Wurzelfunktion.*
a muss positiv sein; da der Graph aber eher flach ist, ist $a < 0$.
Ansatz: P und Q in $y = a \cdot x^r$ einsetzen.
P: $0{,}5 = a \cdot 1^r \Rightarrow a = 0{,}5$; Q: $1 = 0{,}5 \cdot 4^r \Rightarrow r = 0{,}5$

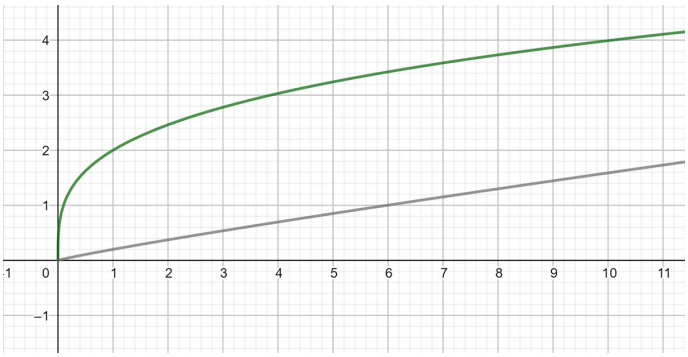
Weil die Funktion $x > 1$ langsamer wächst als $y = x$, muss $r < 1$ sein. Weil $f(0) = 0$ ist, muss weiter $r > 0$ gelten. Wegen $a = f(1)$ ist $0 < a < 1$ (ist das schon eine Rechnung gewesen?). Die Lösung der Autoren ist eine andere:

> *r muss eine Bruchzahl sein, denn der Graph ist offensichtlich der einer Wurzelfunktion.*

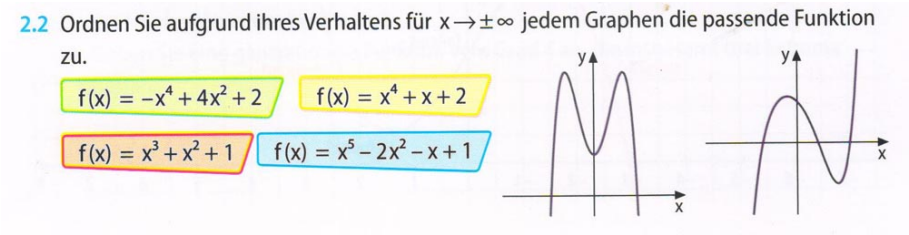
Offenbar heißen Zahlen r, die zwischen 0 und 1 liegen, Bruchzahlen, und die zugehörigen Potenzfunktionen heißen dann Wurzelfunktionen. Und ganz offenbar muss eine Wurzelfunktion vorliegen, denn die Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Q}$, bei denen n gerade oder ungerade ist, haben anders ausgesehen.

> *a muss positiv sein; da der Graph aber eher flach ist, ist $a < 0$.*

Druckfehler; vermutlich meinten sie $a < 1$. Aber die Begründung ist offenkundig schwachsinnig. Welches Ergebnis liefert diese Argumentation, wenn man sie auf $f(x) = 2x^{0,5}$ bzw. auf $g(x) = 0,2x^{0,9}$ anwendet?



Auch die letzte Aufgabe auf Seite 11 hat es in sich:



Anhand des Verhaltens für $x \to \pm\infty$ kann ich $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ und $g(x) = x^5 - 2x^2 - x + 1$ nicht auseinanderhalten. Dass das zweite Schaubild keine kubische Funktion ist, könnte man an der fehlenden Punktsymmetrie erkennen. Allerdings haben ja in diesem Buch kubische Funktionen, in denen der Termbaustein x^2 additiv und mit einem etwaigen Vorfaktor multiplikativ verknüpft vorkommt, keine Symmetrie; da wird es dann eng. Weil man an Polynomfunktionen die Tangente in $x = 0$ ablesen kann, indem man nur den linearen Teil behält, hat f Tangente $y = 1$ in $x = 0$, das Schhaubild von g dagegen $y = -x + 1$. Aber wer sieht das schon? Auch dass f für positive x keine Nullstelle hat ist für Schüler im Basisfach unsichtbar.

Nach der mustergültigen Besprechung von Symmetrie und Verhalten im Großen geht es auf S. 12 an den Begriff der Ableitung:

> *Als Ableitung bezeichnet man den Grenzwert des Differentialquotienten.*

Nimm das, Basisfachler!

Es gibt viele Arten, die Summenregel zu motivieren. Die graphische Methode, welche die Autoren auf S. 14 anwenden, ist absolut unverständlich: Aus einem Koordinatensystem mit Schaubildern von sechs verschiedenen Funktionen eine triviale Eigenschaft herauszulesen ist verwirrend, sogar für mich (sh. Abb. 2).

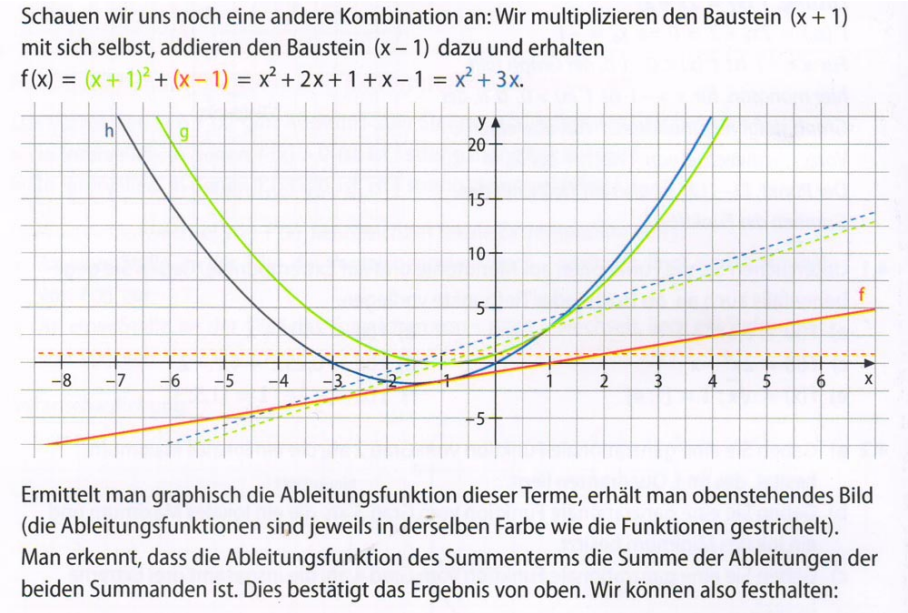


Abbildung 2. Herleitung der Summenregel

Außerdem macht mich das ständige Geschwurbel von Termbausteinen wahnsinnig. Es ist, als ob man im Kindergarten vor dem LEGO-Eimer sitzt.

Tatsächlich wird diese Bausteinmanie derart exzessiv praktiziert, dass man versucht ist, per Ferndiagnose irgendwelche psychischen Traumata zu diagnostizieren. Den Autoren würde es nie einfallen, einfach nur die Funktion $f(x) = 3x$ zu betrachten; stattdessen gehen sie so vor:

> *Nun kombinieren wir den reinen Zahlterm* 3 *mit Termen so, dass er einen Vorfaktor darstellt. Man erhält z.B. den Term* $3x$.

Irgendwie habe ich das Gefühl, dass die Autoren überzeugt sind, etwas Großartiges geleistet zu haben, wenn sie beim Term $3x$ angekommen sind.

> *Wir schauen uns die Steigungen der zugehörigen Funktionen an:*

Erstaunlich ist, dass zu einem Term jetzt plötzlich zwei Funktionen gehören, und dass diese Funktionen Steigungen besitzen: eine Seite vorher hatten noch die Tangenten oder die Graphen Steigungen.

> *$g(x) = x$ hat Steigung 1, $h(x) = 3x$ hat Steigung 3.*

Eine profunde Erkenntnis. Der Sinn der Termkombination liegt darin, dass man nach zwei solcher Beispiele die Faktorregel hergeleitet hat:

> *Faktorregel für Ableitungen: Die Funktion $f = c \cdot g(x)$ ($c \in \mathbb{R}$) hat die Ableitung f' mit $f'(x) = c \cdot g'(x)$.*

Ist es Absicht oder Nachlässigkeit, wenn hier $f = c \cdot g(x)$ steht anstatt „f mit $f(x) = c \cdot g(x)$“? Ich will es gar nicht wissen. Weiter im Text:

> *Nun kombinieren wir den Term x multiplikativ mit sich selbst und erhalten die Funktion $f(x) = x^2$. Stellt man die Funktion graphisch dar, erhält man eine Parabel, deren Steigungen eine Gerade ergeben.*

Hä? Ich weiß wohl, was die Autoren meinen, wenn sie sagen, die Steigungen der Parabel ergäben eine Gerade. Aber können die das in ein Schulbuch schreiben? Yes they can.

> *Wir nehmen ein weiteres x hinzu und erhalten den Funktionsterm $f(x) = x^3$.*

Bob der Baumeister kocht Funktionsterme nach Rezept.

> *Wir haben anhand dieser Beispiele plausibel gemacht:*
>
> *Potenzregel für Ableitungen.*
>
> *Für jede natürliche Zahl n als Exponent hat die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ die Ableitungsfunktion $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.*

Das steht auf S. 19. Auf S. 22 können die Schüler dann $f(x) = \sqrt{x}$ ableiten, ohne dass die Potenzregel irgendwie auf “Bruchzahlen“ ausgedehnt worden wäre, und noch eine Seite später geht das auch mit $f(x) = \frac{1}{x}$. Das hat der Lambacher-Schweizer so vorgemacht, aber bei dem lag zwischen natürlichen und reellen Exponenten immerhin ein Schuljahr. Die Autoren haben die Schüler auf S. 16 daran erinnert, wie negative Exponenten zu gebrauchen sind:

> *Zur Erinnerung: $x^{-2} = \frac{1}{x^k}$ für $k \in \mathbb{N}$.*

Kann passieren. Aber nicht so oft.

Die Genderrevolution in den Mathematik-Schulbüchern hat die Mehrzahl der Autoren, soweit ich deren Alter durch Informationen im Netz abschätzen konnte, am eigenen Leib erfahren. Sie merken deshalb auch gar nicht, was sie da tun (S. 19):

- Axel meint: „Wenn man den Graphen einer Funktion an der y-Achse spiegelt, so spiegelt sich auch der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion an der y-Achse.“ Hat er recht? Begründen Sie.
- Catrin meint: „Wenn man den Graphen einer Funktion an der x-Achse spiegelt, so spiegelt sich auch der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion an der x-Achse.“ Hat sie recht? Begründen Sie.

Einfache Übung: Axel ist ein Junge, Catrin ein Mädchen. Also hat Axel nicht recht, Catrin schon. Drei Seiten später ist Selina dran, aber allein:

> *Selina sagt: „Wenn eine Funktion durch Multiplikation des Gliedes mit der höchsten x-Potenz mit 4 gestreckt wird, so muss man auch die Steigung an dieser Stelle mit 4 multiplizieren.“*

Axel sagt nichts, wahrscheinlich weil er weiß, dass er ein Junge ist und sowieso nie recht hat; also hilft uns die Gendertechnik bei der Beantwortung der Frage nicht. Vermutlich bin ich zu alt um zu verstehen, was Selina gemeint hat. Oder sie ist sehr blond. Wie kann man eine Funktion mit 4 strecken? Womit wird das Glied mit der höchsten x-Potenz multipliziert? Warum muss ich die Steigung multiplizieren und wozu? Und an welcher Stelle?

Natürlich kann ich raten, was die Autoren Selina in den Mund legen wollten: Wenn man in der Funktion $f(x) = x+1$ die höchste Potenz von x mit 4 multipliziert (also „streckt“), dann wird die Ableitung ebenfalls mit 4 gestreckt (also multipliziert). Das scheint sogar richtig zu sein: $f'(x) = 1$, und $g(x) = 4x + 1$ hat Ableitung $g'(x) = 4$. Wir versuchen das ganze noch mit $f(x) = x + 2$ und $f(x) = x + 3$ und zitieren dann die Autoren (S. 27):

> *Zwar genügen drei Positivbeispiele nicht, um einen Satz zu beweisen, aber immerhin, um ihn plausibel zu machen.*

Nach einer langen Diskussion auf Seite 20, in der es darum geht, dass die Ableitung einer Funktion sich ändert, wenn man die Funktion ändert

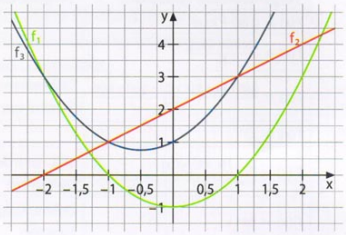
Verstehen

Bisher haben wir vor allem ganzrationale Funktionen, z. B. f mit $f(x) = x^3 + 2x - 1$, betrachtet; in ihnen sind Termbausteine (hier x^3, $2x$ und 1) entweder additiv oder subtraktiv verknüpft.

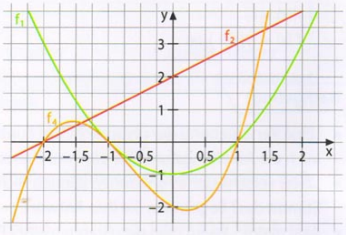
Zur Erinnerung:
3. binomische Formel
$(x+1)\cdot(x-1) = x^2 - 1$

Im Folgenden wollen wir die multiplikative Verknüpfung von Termbausteinen betrachten. Zunächst verknüpfen wir die beiden Termbausteine $(x^2 - 1)$ und $(x + 2)$ additiv miteinander und schauen uns sowohl die Graphen von $f_1(x) = x^2 - 1$ und $f_2(x) = x + 2$ an als auch den Graphen der durch Addition entstandenen Funktion $f_3(x) = (x^2 - 1) + (x + 2) = x^2 + x + 1$.

Man erkennt: Die Addition der beiden Funktionen verändert den Graphen der Funktion, die den höheren Grad hat (also $f_1(x)$), nicht wesentlich, er verschiebt sich, wodurch sich auch die Anzahl der Nullstellen ändert; der prinzipielle Kurvenverlauf aber ist ähnlich. Nun multiplizieren wir die beiden Terme miteinander und betrachten die daraus resultierende Funktionsgleichung und deren Graphen:
$f_4(x) = (x^2 - 1)\cdot(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.



Wir sehen, dass sich nun einiges verändert hat: Der prinzipielle Kurvenverlauf hat sich ebenso verändert wie die Anzahl der Nullstellen, die Anzahl der Extrempunkte, das Steigungsverhalten, die Monotonie. Insofern ist es folgerichtig, dass sich auch die Ableitung ändert, wenn das Produkt aus Termen gebildet wird.



Merke

Bildet man das Produkt zweier Funktionen, entsteht eine neue Funktion mit gänzlich anderen Eigenschaften als die beiden Ausgangsfunktionen. Unter anderem ist auch deren Steigungsverhalten völlig verschieden und somit deren Ableitung.

Abbildung 3. Herleitung der Produktregel

(auch an einen Spezialfall der dritten binomischen Formel wird erinnert), kommt die Schlussfolgerung

> *Bildet man das Produkt zweier Funktionen, entsteht eine neue Funktion mit gänzlich anderen Eigenschaften als die beiden Ausgangsfunktionen. Unter anderem ist auch deren Steigungsverhalten völlig verschieden und somit deren Ableitung.*

Grammatikalisch korrekt hätte es natürlich heißen müssen, dass das Produkt gänzlich andere Eigenschaften besitzt als die Ausgangsfunktionen, oder dass eine Funktion mit gänzlich anderen Eigenschaften als die *der* beiden Ausgangsfunktionen entsteht. Aber korrekte Grammatik wäre hier Perlen vor die Säue geworfen: Bestenfalls ist dieser Sermon nichtssagend (in der Einleitung zum Problem ging es natürlich nicht um das Produkt zweier Funktionen, sondern um die multiplikative Verknüpfung zweier Termbausteine). Was wäre denn die Alternative? Dass

die Funktion ähnliche Eigenschaften beistzt wie die Ausgangsfunktionen? Die Behauptung im Text ist, dass Addition zweier Funktionen den prinzipiellen Verlauf des Schaubilds nicht oder nur unwesentlich ändert, etwa bei der Addition der Termbausteine $x^2 - 1$ und $x + 2$.

Die "Herleitung" der Produktregel ist durch den Abstecher zu Flächeninhalten von Rechtecken ziemlich konfus geraten; im Wesentlichen dient diese Exkursion nur dazu, die algebraische Trivialität $a-c = a-b+b-c$ zu veranschaulichen. Dass bei der Herleitung $u(x+h)$ unvermittelt und kommentarlos zu $u(x)$ wird, ist hoffentlich nur ein Druckfehler.

Auf S. 24 und S. 26 wird dann noch der Begriff der Minimalstelle eingeführt. Das ist die x-Koordinate eines Tiefpunkts des Schaubilds einer Funktion.

Kriminell wird es bei der Verkettung von Funktionen auf S. 28:

> *Auch im Alltag spielt die Verkettung von Ausdrücken eine Rolle. Ebenso wie in der Mathematik ist die Reihenfolge der Verkettung in der Regel von Bedeutung. Untersuchen Sie folgende Beispiele auf* $u(v(x)) = v(u(x))$ *bzw.* $u(v(x)) \neq v(u(x))$*:*
>
> a) *Macht der Sprache und Sprache der Macht*
>
> b) *Studie der Themen und Themen der Studie*
>
> c) *Rundfahrt der Sieger und Sieger der Rundfahrt*
>
> d) *Liga der Champions und Champions der Liga*
>
> e) *Teiler der Zahl und Zahl der Teiler*

Blödheit der Autoren und Autoren der Blödheit? Ich soll untersuchen, ob es einen Unterschied zwischen Nominativ und Genitiv gibt? Was hat das mit der Verkettung von Funktionen zu tun?

Dass der Definitionsbereich bei der Verkettung zweier Funktionen (oder, wie die Autoren es gerne hätten, von Termbausteinen) der Definitionsbereich noch nicht einmal en passant erwähnt wird, lässt tief blicken. Die Funktion $f(x) = u(v(x))$ ist etwa für $u(x) = \sqrt{x-1}$ und $v(x) = -x^2$ an keiner Stelle definiert.

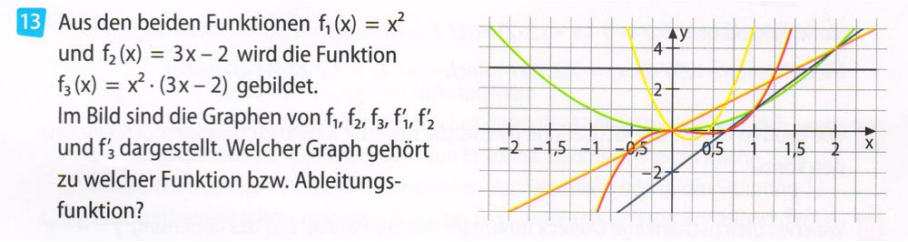
Es ist auch beileibe nicht so, dass man eine Funktion f eindeutig als die Verkettung zweier Funktionen u und v schreiben kann; vielmehr ist $f(x) = u(v(x))$ für $u(x) = f(x)$ und $v(x) = x$ ebenso wie für $u(x) = f(2x)$ und $v(x) = \frac{x}{2}$ und unzählige andere Möglichkeiten. Im

Falle von $f(x) = (x+2)^2$ (S. 28, Aufg. 5) kann man zwar $u(x) = x^2$ und $v(x) = x + 2$ wählen, die Bestimmung von $g(x) = v(u(x))$ (und nicht $f(x) = v(u(x))$ wie im Buch) zu fordern ist aber unsinnig, weil dies von der Wahl von u und v abhängt. Auch in Aufgabe 6 kann man nicht verlangen, *die* innere und *die* äußere Funktion zu bestimmen, sondern nur jeweils *eine*.

> *Recherchieren Sie: Was versteht man unter dem isoperimetrischen Problem. Was hat es mit dem Inhalt dieses Kapitels zu tun?*

Antwort auf die zweite Frage: Nichts. In diesem Kapitel ging es um Ableitungsregeln, und in einer Aufgabe um die Bestimmung des Maximums einer quadratischen Funktion. Beim isoperimetrischen Problem geht es darum, eine Funktion zu finden, welche etwas maximiert.

Nachhaltigkeit wird in diesem Buch fast so groß geschrieben wie der kreative Umgang mit Fehlern. Wenn auch nur manchmal:



Das Papier, das man dabei gespart hat, muss der Lehrer aber durch erhöhten Alkoholkonsum wieder ausgleichen. Gewonnen ist dabei also nichts. Und warum, bitteschön, sind die Achsen in den Schaubildern, die das Buch präsentiert, so oft unterschiedlich skaliert? Damit man die Steigung der Tangenten besser ablesen kann?

Dies ist beileibe kein Einzelfall (man schaue sich noch einmal Abb. 2 an): Auch in Abb. 4 sind alle Koordinatensysteme durch dieselbe seltsame Skalierung verzerrt. Wer sich noch an die erste Aufgabe erinnert, wird sich fragen, ob die Autoren diesesmal bei der Zuordnung von Schaubildern und Funktionen aufgepasst haben. Haben sie nicht: Das Schaubild von f hat Nullstellen in $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$, folglich liegt zwischen x_1 und x_2 bzw. zwischen x_2 und x_3 (mindestens) ein Extrempunkt. Also hat f' in diesen Intervallen Nullstellen, folglich ist keines der Schaubilder dasjenige von f'.

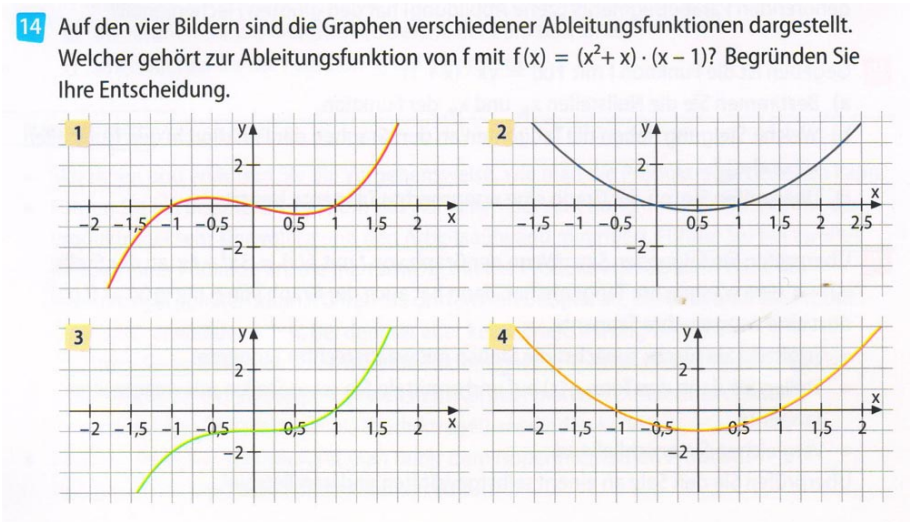
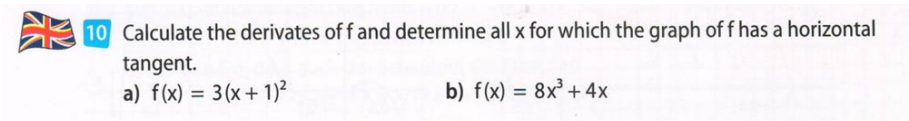


Abbildung 4. Zuordnung von Schaubildern

Denkbar ist auch, dass die Autoren einmal mehr Funktion und Ableitung verwechselt haben und nach dem Schaubild von f fragen wollten; dies müsste in etwa Schaubild 1 sein.

Lobenswert auch das Einbinden von auf Englisch gestellten Aufgaben:



Hätten die Autoren gewusst, wie man das Internet benutzt, um herauszufinden, ob die eigene Übersetzung ins Englische korrekt ist, oder hätten sie google translate nicht blind vertraut, dann hätten sie nicht

> *Calculate the derivates of f and determine all x for which the graph of f has a horizontal tangent.*

geschrieben, sondern

> *Determine the derivative of f and find all values of x at which the graph of f has a horizontal tangent.*

Oder so ähnlich.

Erfreulich ist auch, dass es fast keine Aufgaben aus der Lebenswelt der Schüler mehr gibt; so kann man sich als Autor nicht mehr blamieren. Eine Aufgabe ist aber denoch reingerutscht:

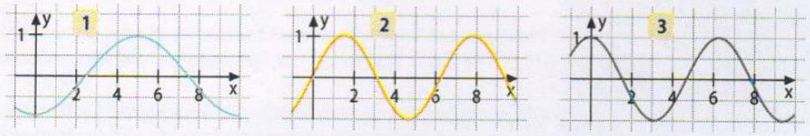
4 Am Elbufer wird täglich der Wasserstand gemessen. Durch Ebbe und Flut entsteht eine wellenförmige Kurve, wenn man die Werte in einem Koordinatensystem veranschaulicht. Die Messwerte können durch folgende Funktionsgleichung wiedergegeben werden:
$f(t) = 1{,}5 \sin\left(\frac{\pi}{5}(t-5)\right) + 1{,}5$ (t in h, f(t) in m).

a) Geben Sie den Wasserstand zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

b) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen.

c) Steigt oder fällt der Wasserstand zum Zeitpunkt $t = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Welcher der folgenden Graphen gehört zur ersten Ableitung von f? Begründen Sie.



e) Berechnen Sie: Wann erreicht der Wasserstand sein Maximum, wann sein Minimum? Wie hoch ist das Wasser dann jeweils? Wie groß ist der Tidenhub, also der Unterschied zwischen dem Scheitelpegel (Flut) und dem untersten Pegelstand (Ebbe)?

Als erstes stellen wir fest, dass die t-Achsen mit x bezeichnet sind. Im schriftlichen Abi gäbe es dafür Punktabzug, aber für das mündliche ist das wohl nicht so wichtig.

Weiter ist die Aufgabe auf den zweiten Blick doch nicht aus der Lebenswelt irgendeines Schülers entnommen, denn die Frage, zu welchem Zeitpunkt t es Hochwasser hat, ist vollkommen belanglos, wenn man nicht weiß, um welche Uhrzeit und an welchem Tag die Aufgabenuhr auf $t = 0$ gestellt wird.

Die Zeitdauer zwischen einem Hochwasser und dem nächsten beträgt hier $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$ Stunden. Das ist seltsam, hängt die Flut doch im wesentlichen vom Mond ab; weil dieser sich in in derselben Richtung um die Erde dreht wie diese rotiert, ergibt sich eine Dauer von t Tagen aus der Gleichung $\frac{1}{t} = 1 - \frac{1}{30}$ zu etwa $\frac{30}{29} \cdot 24 \approx 24,8$ Stunden; weil es auch auf der mondabgewandten Erdhalbkugel einen Flutberg gibt, liegen also im Schnitt $12,4$ Stunden zwischen den Flutbergen. Das, liebe Didaktoren, war mathematisches Modellieren, wobei ich mir die Herleitung der Gleichung gespart habe.

Dass zwischen zwei Fluten keine 10 Stunden vergehen verrät einem auch das allwissende Internet, dem ich den Pegelstand der Elbe in St. Pauli am 24.11.2019 entnommen habe (Abb. 5).

Das sieht eher aus wie eine Sägezahn- und nicht wie eine Sinuskurve. Ist aber egal.

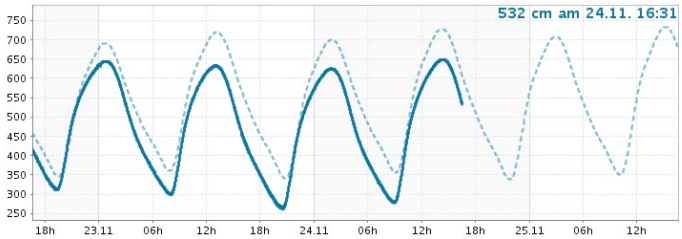


Abbildung 5. Pegelstand der Elbe in St. Pauli

Den Lösungsband würde ich gerne sehen. Immerhin wird erklärt, warum die Autoren so viele fachliche Fehler gemacht haben: Anstatt sich auf die Korrektheit der Mathematik zu konzentrieren, haben sie sich, wie man auf S. 33 erfährt, vor allem mit der Angabe der prozessorientierten Kompetenzen beschäftigt.

Das Buch *Mathe Delta 6* hat 2018 die Bronze-Medaille bei der Verleihung des Schulbuchs des Jahres[1] gewonnen. In der Jury sitzt, soweit ich das der Webseite des Georg Eckert Instituts entnehmen kann, kein Mathematiker und kein Mathematiklehrer. Was der Preis wert ist, kann man am Platz 1 des Jahres 2018 ablesen: Den hat tatsächlich das miserabelste deutsche Mathematikbuch aller Zeiten bekommen, nämlich die *MatheWerkstatt*. Unter deren Herausgebern Bärbel Barzel, Stephan Hußmann, Timo Leuders und Susanne Prediger sind drei der berüchtigsten Didaktoren, die Deutschland je hervorgebracht hat. Die Nominierungen für 2019 stehen inzwischen fest; ein Buch aus dem MINT-Bereich ist nicht dabei, weil die neuen Bücher in diesem Bereich zu schlecht waren (kommt öfter vor). Oder waren sie zu gut?

Die Leseprobe ist übrigens überschrieben mit

> *Mathematik als Basisfach in der Kursstufe –*
> *neue Herausforderungen in der Abiturvorbereitung.*

Mit Mathe Delta hat man jedenfalls eine Herausforderung mehr.

[1] Siehe `http://www.gei.de/stipendien-preise/schulbuch-des-jahres/preistraegerinnen/2018.html`