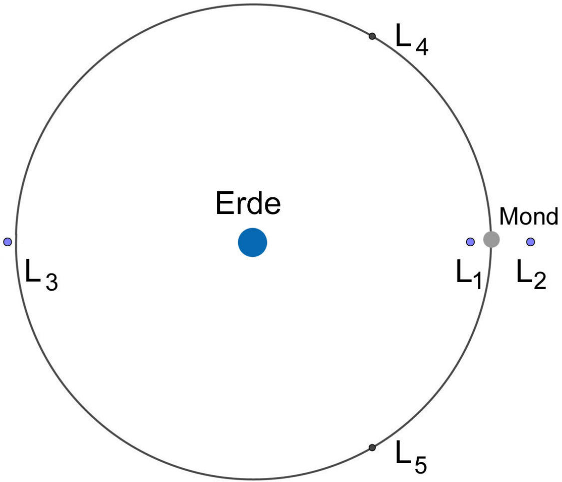
Lagrange-Punkte

Im Falle von zwei Massen, die sich nur unter dem Einfluss der Schwerkraft bewegen, kann man die Newtonschen Gleichungen exakt lösen. Solche Objekte umkreisen sich auf Ellipsenbahnen.
Im Falle von drei Massen ist das entsprechende Problem (Dreikörperproblem) nur noch durch Näherungsmethoden beherrschbar.
Dennoch werden bis heute periodische Umlaufbahnen im Dreikörperproblem entdeckt: gif

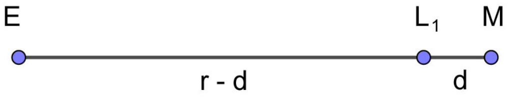
Lagrange-Punkte

Leonhard Euler hat drei heute nach Lagrange benannte Punkte gefunden, in welchem drei Körper periodische Bahnen haben, nämlich die Lagrangepunkte L_1, L_2 und L_3.



Lagrange-Punkte

Die Existenz des Lagrangre-Punkts L_1 kann man mit den Mitteln der Schulmathematik nachweisen. Das wollen wir jetzt machen. Seien m und M die Massen von Mond und Erde und μ die Masse des kleinen Körpers; wir nehmen an, dass m klein gegenüber M ist, sodass der Schwerpunkt des Systems mit dem Mittelpunkt der Erde zusammenfällt. Weiter nehmen wir an, dass μ klein gegenüber m (und erst recht gegen M) ist: dies erlaubt uns, die Schwerkraft der kleinen Masse zu vernachlässigen. Wir bezeichnen mit r den Abstand von Erde und Mond und mit d den Abstand des Lagrange-Punkts L_1 zum Mond.



Lagrange-Punkte

Die Schwerkraft der Massen M und m bewirken Beschleunigungen a_1 und a_2 der Masse μ im Lagrangepunkt L_1, die gegeben sind durch

$$a_1 = G\frac{M}{(r-d)^2} \quad \text{und} \quad a_2 = G\frac{m}{d^2}.$$

Die Zentripetalbeschleunigung der Masse μ ist gleich

$$a_Z = \frac{v^2}{r-d} = \frac{4\pi^2(r-d)}{T^2}.$$

Die Beschleunigung durch M muss also die Beschleunigung durch m und die Zentripetalbeschleunigung aufheben:

$$a_1 - a_2 = a_Z,$$

also

$$G\frac{M}{(r-d)^2} - G\frac{m}{d^2} = \frac{4\pi^2(r-d)}{T^2}.$$

Lagrange-Punkte

Wir dividieren Zähler und Nenner des ersten Terms durch r^2 und die des Terms auf der rechten Seite durch r und erhalten

$$G\frac{M}{r^2}\frac{1}{(1-\frac{d}{r})^2} - G\frac{m}{d^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}\cdot\left(1-\frac{d}{r}\right).$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz ist

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{r^3};$$

also haben wir

$$G\frac{M}{r^2}\frac{1}{(1-\frac{d}{r})^2} - G\frac{m}{d^2} = \frac{GM}{r^2}\cdot\left(1-\frac{d}{r}\right),$$

nach Kürzen von G also

$$\frac{M}{r^2}\frac{1}{(1-\frac{d}{r})^2} - \frac{m}{d^2} = \frac{M}{r^2}\cdot\left(1-\frac{d}{r}\right).$$

Lagrange-Punkte

Diese Gleichungen sind zu kompliziert, als dass man von Hand viel weiter käme. Wir linearisieren also, d.h. wir ersetzen Funktionen an geeigneten Stellen durch ihre Tangenten.
Weil d gegenüber r klein ist, können wir die Approximationen

$$(1-h)^2 \approx 1-2h, \quad \frac{1}{1-2h} \approx 1+2h$$

benutzen.
Damit folgt

$$\frac{M}{r^2}\left(1+2\tfrac{d}{r}\right) - \frac{m}{d^2} \approx \frac{M}{r^2} \cdot \left(1-\tfrac{d}{r}\right).$$

Lagrange-Punkte

Umformen liefert

$$
\begin{aligned}
\frac{M}{r^2}\left(1+2\tfrac{d}{r}\right)-\frac{m}{d^2} &\approx \frac{M}{r^2}\cdot\left(1-\tfrac{d}{r}\right) &&\Big|\ -\frac{M}{r^2}\cdot\left(1-\tfrac{d}{r}\right)+\frac{m}{d^2} \\
\frac{M}{r^2}\left(1+2\tfrac{d}{r}\right)-\frac{M}{r^2}\cdot\left(1-\tfrac{d}{r}\right) &\approx \frac{m}{d^2} \\
\frac{M}{r^2}\cdot\frac{3d}{r} &\approx \frac{m}{d^2} &&\Big|\ \cdot\frac{3d^2r^2}{M} \\
d^3 &\approx \frac{m}{3M}\cdot r^3
\end{aligned}
$$

Lagrange-Punkte

Daraus ergibt sich endlich

$$d \approx \sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \cdot r.$$

Im Falle des Systems Erde Mond erhalten wir damit,

$$d \approx 61\,500 \text{ km}, \quad \text{also} \quad r - d \approx 322\,000 \text{ km},$$

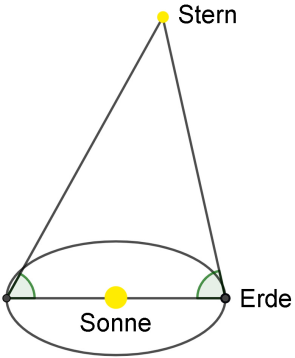
während wir im Falle des Systems Sonne-Erde

$$d \approx 1{,}5 \cdot 10^6 \text{ km}$$

finden.
Das James-Webb-Teleskop befindet sich im Lagrange-Punkt L_2.
Kollision von Galaxien

Parallaxe

Das wichtigste Argument gegen das heliozentrische Weltbild war seit Aristarch die fehlende Parallaxe: Wenn sich die Erde bewegt, müssen sich die Winkel ändern, unter dem wir Sterne sehen.



Diese Winkeländerung (Parallaxe) hat man aber nicht beobachten können.

Parallaxe

Dennoch konnte bereits Newton die richtige Größenordnung des Abstands zu den Sternen abschätzen: Unter der Annahme, dass die Sterne Sonnen sind, deren Leuchtstärke mit der unseren vergleichbar ist, und dem Gesetz, dass die Leuchtstärke mit dem Quadrat des Abstands abnimmt, konnte Newton zeigen, dass Sirius etwa 13 Lichtjahre von uns entfernt sein muss. Diese Abschätzung hat sich als sehr gut erwiesen: heute wissen wir, dass Sirius 8,6 Lichtjahre von uns entfernt ist.

Parallaxe

Bessel hat durch langjährige Beobachtung des Doppelsterns 61 Cygni herausgefunden, dass diese beiden Sterne eine Umlaufdauer von etwa 400 Jahren haben. Die große Halbachse bestimmte er zu $25''$; hätte das System eine Gesamtmasse von einer Sonnenmasse, so könnte man mit der Newtonschen Version des 3. Keplerschen Gesetzes die große Halbachse in Lichtjahren bestimmen, und ein Vergleich mit den $25''$ würde eine Entfernung ergeben, die einer Parallaxe von $0{,}5''$ entspricht. Diese Parallaxe war damals in etwa die Grenze der Messgenauigkeit.

Parallaxe

Daraufhin hat sich Bessel 20 Jahre lang um eine genaue Messung der Parallaxe bemüht. Ausgefeilte Beobachtungen mit den ausgezeichneten Instrumenten, die ihm Fraunhofer angefertigt hat, gelingt es Bessel, für die jährliche Parallaxe von 61 Cygni den Wert $0{,}3136''$ zu messen. Dies sind 657.700 AE, „und die Zeit, welche das Licht gebraucht, um diese Entfernung zu durchlaufen, $= 10{,}28$ Jahre".
Die Parallaxe α ist der Winkel, unter dem der Radius der Erdbahn vom Stern aus gesehen wird. Bezeichnet d die Entfernung, gilt also

$$\tan\alpha = \frac{1\text{ AE}}{d},$$

und damit $d = \frac{1}{\tan\alpha}$ AE.
Bessels Ergebnisse waren sehr genau: Der heutige Wert ist 11,4 Lj.