Von Kepler bis Newton

Jetzt werden wir aus Newtons Gravitationsgesetz das dritte Keplersche Gesetz in seiner genauen Form herleiten.
Wir nehmen an, dass sich zwei Massen m_1 und m_2 auf Kreisbahnen umrunden. Dabei drehen sich beide Massen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.
Wenn die Masse m_1 eine Umdrehung vollendet hat, muss auch die Masse m_2 ihre Umdrehung vollendet haben, weil die Verbindungslinie der beiden Massen durch S geht. Beide Massen haben also die gleiche Winkelgeschwindigkeit ω.

Von Kepler bis Newton

Seien r_1 und r_2 die beiden Abstände zum Schwerpunkt; der Gesamtabstand der beiden Massen ist also $r = r_1 + r_2$. Für die Zentripetalkraft gilt daher

$$F_1 = m_1 \omega^2 r_1 \quad \text{und} \quad F_2 = m_2 \omega^2 r_2.$$

Da sich beide Massen mit derselben Kraft anziehen, muss $F_1 = F_2$ sein, und es folgt

$$\boxed{m_1 r_1 = m_2 r_2}.$$

Setzt man hierin $r = r_1 + r_2$ ein, kann man r_1 und r_2 bestimmen:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r.$$

Beispiel. Der Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems liegt innerhalb der Erde. Mit $r = 384\,000$ km, $m_1 = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg und $m_2 = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg erhalten wir

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \approx 4700 \text{ km}.$$

Der Schwerpunkt ist also 4700 km vom Erdmittelpunkt entfernt und liegt daher 1670 km unter der Erdoberfläche.

Von Kepler bis Newton

Für die gegenseitige Anziehungskraft der zweier Massen m_1 und m_2, die in der Entfernung r_1 nbzw. r_2 um ihren gemeinsamen Schwerpunkt kreisen, folgt nämlich

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 \omega^2 r_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 r.$$

Auf Kreisbahnen ist die Winkelgeschwindigkeit ω aber konstant, und zwar gleich $\omega = \frac{2\pi}{T}$, wobei T die Zeit ist, welche beide Massen brauchen, um sich einmal um den gemeinsamen Schwerpunkt S zu drehen.

Von Kepler bis Newton

Einsetzen liefert

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}.$$

Wendet man diese Gleichung auf die Erde und die Sonne an, so folgt mit $T = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ s \approx 3{,}16 \cdot 10^7$ s und $r = 149{,}6 \cdot 10^6$ km $= 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

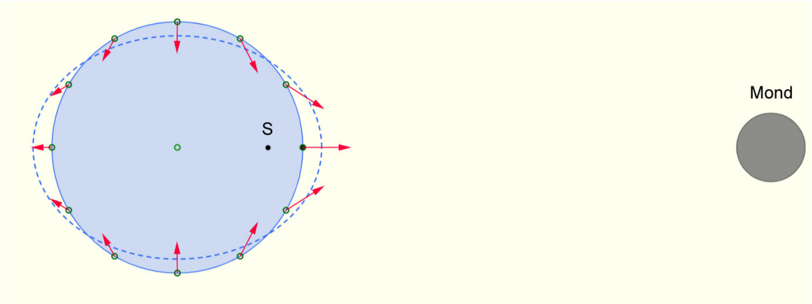
$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \approx 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}.$$

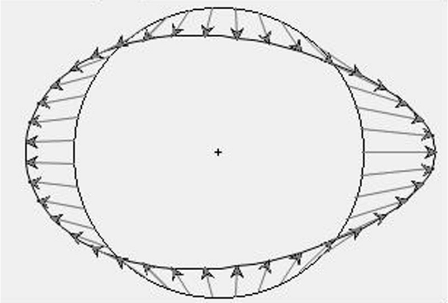
Da die Masse der Erde gegenüber der der Sonne nicht ins Gewicht fällt, ergibt sich so die Sonnenmasse zu etwa $2 \cdot 10^{30}$ kg.

Gezeiten

Dass Ebbe und Flut im Wesentlichen auf den Einfluss des Mondes zurückgehen ist bekannt; die Einzelheiten kennen aber nur wenige. Der Mond zieht das Wasser auf der mondzugewandten Seite stärker an als auf der mondabgewandten Seite. Andererseits wirken auf das Wasser noch die Fliehkraft aus der Rotation der Erde und diejenige, die sich aus der Drehung der Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems ergibt. Wenn man diese Kräfte aufaddiert, erhält man folgendes Bild:

Gezeiten





Gezeiten

Auf dem freien Meer sorgt der Mond für eine Anhebung des Wassers um etwa 30 cm; die Erdkruste selbst wird um bis zu 50 cm angehoben. Dass die Flut an der Küste deutlich höher ausfällt, liegt daran, dass sich das viele Wasser bei niedriger Wasserhöhe aufstauen muss; an der Nordsee liegt der Tidenhub bei zwei bis drei Meter, direkt an den Meeren bei sechs Metern, und geographische Besonderheiten können an manchen Orten dazu führen, dass die Flut bis zu 20 Meter hoch sein kann.

Gezeiten

Dass die Flut am höchsten ist, wenn der Mond im Zenit steht, hört sich plausibel an, ist aber falsch: Weil die Erde sich dreht, schiebt sie den Flutberg vom Mond weg. Mit anderen Worten: wenn der Mond im Zenit steht, ist die Flut bereits vorbei. Dies führt dazu, dass der Mond, der den Flutberg ja anzieht, die Rotation der Erde bremst. Die Erde dreht sich also jedes Jahr langsamer, und zwar messbar; vor Millionen von Jahren war ein Tag also deutlich kürzer. Wegen der Erhaltung des Drehimpulses muss sich der Mond dafür jedes Jahr etwas weiter von der Erde entfernen, nämlich im Schnitt etwa 4 cm.

Gezeiten

Auch die Erde übt auf den Mond Gezeitenkräfte aus; diese haben dafür gesorgt, dass die Rotation des Monds vollständig abgebremst wurde und uns der Mond immer die gleiche Seite zuwendet. Weil die Mondbahn elliptisch ist, gilt das nur in erster Näherung; tatsächlich können wir von der Erde aus deutlich mehr als 50 % der Mondoberfläche beobachten.