Von Kepler bis Newton

Aus dem dritten Keplerschen Gesetz kann man den wesentlichen Kern des Newtonschen Gravitationsgesetzes ableiten.
Seien T_1 und T_2 die Umlaufszeiten zweier Planeten und r_1 bzw. r_2 deren große Halbachsen (wir gehen der Einfachheit halber von Kreisbahnen aus). Dann ist die Größe

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = k$$

nach dem dritten Keplerschen Gesetz konstant.

Von Kepler bis Newton

Die Zentripetalkraft für einen Planeten der Masse m, der sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r um die Sonne bewegt, ist $F = m\frac{v^2}{r}$. Hierbei ist $v = \frac{2\pi r}{T}$, also

$$F = \frac{m}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2.$$

Setzen wir hier $T^2 = kr^3$ ein, so erhalten wir

$$F = \frac{4\pi^2 m}{kr^2}.$$

Die Konstante k wird dabei von der Masse der Sonne abhängen, und weil sich Planet und Sonne mit derselben Kraft anziehen (actio = reactio), kann man hieraus folgern:

Von Kepler bis Newton

Die Kraft, mit der sich zwei Massen m_1 und m_2 im Abstand r anziehen, ist gegeben durch

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Umgekehrt lässt sich aus Newtons Gravitationsgesetz das dritte Keplersche Gesetz herleiten, und zwar in einer genaueren Form, die es erlaubt, die Masse des Zentralobjekts (mit Hilfe der Gravitationskonstanten) zu bestimmen.

Von Kepler bis Newton

Zuerst wollen wir wie Newton zeigen, dass dieses Gesetz mit unseren Kenntissen über die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche und der Mondbahn kompatibel ist.
Ist also die Kraft, die einen Apfel der Masse m_A vom Baum fallen lässt, dieselbe Kraft, welche den Mond der Masse m_M auf eine Umlaufbahn zwingt?

Von Kepler bis Newton

Die Schwerkraft der Erde sorgt im Abstand des Erdradius r für eine Beschleunigung des Apfels von $g = \frac{F}{m_A} \sim \frac{M}{r^2} \approx 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$. Der Mond wird mit

$$a = \frac{F}{m_M} = \frac{v^2}{R}$$

zur Erde hin beschleunigt, wo v seine Geschwindigkeit und R sein Abstand von der Erde ist. Weil der Mond etwa 60 Erdradien weit weg ist, und weil seine Geschwindigkeit gleich $v = \frac{2\pi R}{T}$ ist, erhalten wir die Beschleunigung des Monds zu

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Von Kepler bis Newton

Mit $T = 27{,}3$ d und $R = 384\,000$ km folgt daraus

$$a \approx 0{,}00272 \text{ m/s}^2.$$

Das ist $\frac{1}{3600} = \frac{1}{60^2}$ von g.
Dies entspricht der Abnahme der Schwerkraft mit dem Quadrat des Abstands. Beachte, dass in dieser Rechnung die Gravitationskonstante (die Newton nicht kannte) keine Rolle spielt.

Von Kepler bis Newton

Jetzt werden wir aus Newtons Gravitationsgesetz das dritte Keplersche Gesetz in seiner genauen Form herleiten.
Wir nehmen an, dass sich zwei Massen m_1 und m_2 auf Kreisbahnen umrunden. Dabei drehen sich beide Massen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.
Wenn die Masse m_1 eine Umdrehung vollendet hat, muss auch die Masse m_2 ihre Umdrehung vollendet haben, weil die Verbindungslinie der beiden Massen durch S geht. Beide Massen haben also die gleiche Winkelgeschwindigkeit ω.

Von Kepler bis Newton

Seien r_1 und r_2 die beiden Abstände zum Schwerpunkt; der Gesamtabstand der beiden Massen ist also $r = r_1 + r_2$. Für die Zentripetalkraft gilt daher

$$F_1 = m_1 \omega^2 r_1 \quad \text{und} \quad F_2 = m_2 \omega^2 r_2 .$$

Da sich beide Massen mit derselben Kraft anziehen, muss $F_1 = F_2$ sein, und es folgt

$$\boxed{m_1 r_1 = m_2 r_2}.$$

Setzt man hierin $r = r_1 + r_2$ ein, kann man r_1 und r_2 bestimmen:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r .$$

Beispiel. Der Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems liegt innerhalb der Erde. Mit $r = 384\,000$ km, $m_1 = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg und $m_2 = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg erhalten wir

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \approx 4700 \text{ km}.$$

Der Schwerpunkt ist also 4700 km vom Erdmittelpunkt entfernt und liegt daher 1670 km unter der Erdoberfläche.

Von Kepler bis Newton

Für die gegenseitige Anziehungskraft der zweier Massen m_1 und m_2, die in der Entfernung r_1 nbzw. r_2 um ihren gemeinsamen Schwerpunkt kreisen, folgt nämlich

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 \omega^2 r_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 r.$$

Auf Kreisbahnen ist die Winkelgeschwindigkeit ω aber konstant, und zwar gleich $\omega = \frac{2\pi}{T}$, wobei T die Zeit ist, welche beide Massen brauchen, um sich einmal um den gemeinsamen Schwerpunkt S zu drehen.

Von Kepler bis Newton

Einsetzen liefert
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}.$$
Wendet man diese Gleichung auf die Erde und die Sonne an, so folgt mit $T = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ s \approx 3{,}16 \cdot 10^7$ s und $r = 149{,}6 \cdot 10^6$ km $= 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m
$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \approx 1{,}99 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$
Da die Masse der Erde gegenüber der der Sonne nicht ins Gewicht fällt, ergibt sich so die Sonnenmasse zu etwa $2 \cdot 10^{30}$ kg.