Schwarzschildradius

Der Ereignishorizont eines schwarzen Lochs ist derjenige Bereich um das schwarze Loch, aus dem keine Information mehr nach außen kommen kann. Bei einem nicht rotierenden schwarzen Loch ist dieser Bereich eine Kugel, dessen Radius man mit der klassischen Newtonschen Theorie abschätzen kann.

Schwarzschildradius

Sei M die Masse und R der Radius eines Planeten oder eines Sterns; die erste kosmische Geschwindigkeit ist diejenige, die ein Körper haben muss, um eine Umlaufbahn mit kleinstmöglichem Radius $r = R$ zu erreichen; die zweite kosmische Geschwindigkeit ist diejenige, die ein Körper braucht, um das Schwerefeld des Objekts verlassen zu können.

1. kosmische Geschwindigkeit

Um einen Körper der Masse m auf einer stabilen Kreisbahn mit Radius R zu halten, muss die Anziehungskraft durch den Planeten gleich der Fliehkraft sein:

$$G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}.$$

Daraus ergibt sich die 1. kosmische Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Im Falle der Erde sind das 7,9 km/s, an der Sonnenoberfläche ca. 436 km/s

2. kosmische Geschwindigkeit

Um die Geschwindigkeit zu berechnen, die ein Körper an der Oberfläche eines Objekts haben muss, damit er dessen Schwerefeld verlassen kann, brauchen wir etwas mehr Mathematik, weil die Schwerkraft mit der Entfernung kleiner wird. In einer Entfernung r ist diese gegeben durch

$$F = G\frac{Mm}{r^2}.$$

Um den Körper eine kleine Strecke Δr weiter nach draußen zu heben, brauchen wir die Energie (Kraft mal Weg)

$$\Delta E = G\frac{Mm}{r^2}\Delta r.$$

Diese Energiebeträge werden jetzt mit einem Integral aufsummiert:

2. kosmische Geschwindigkeit

$$E = G \int_R^\infty \frac{Mm}{r^2}\, dr = -\frac{GMm}{r}\Big|_R^\infty = \frac{GMm}{R}.$$

Diese kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$ muss man dem Objekt mitgeben; daraus folgt die 2. kosmische Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Diese ist somit $\sqrt{2}$-mal so groß wie die erste kosmische Geschwindigkeit; das sind 11,2 km/s im Falle der Erde und 617 km/s im Falle der Sonne.

Schwarzschildradius

Ist die Masse des Zentralkörpers hinreichend groß, kann ein Körper dem Schwerefeld selbst dann nicht entkommen, wenn man ihn mit Lichtgeschwindigkeit losschickt: aus

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

folgt dann

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

für den Radius einer solchen Masse. Diese Rechnung ist für Licht sinnfrei, weil dessen Geschwindgkeit gar nicht abnehmen kann; dennoch führt eine Rechnung mit der allgemeinen Relativitätstheorie auf denselben Schwarzschildradius.

Schwarzschildradius