DISKRETES WACHSTUM

FRANZ LEMMERMEYER

- *Lineares Wachstum* liegt vor, wenn ein Bestand in gleichen Zeitabschnitten immer um denselben Betrag a zu- oder abnimmt. Der Bestand zum Zeitpunkt t ist dann gegeben durch

$$B(t) = B(0) + at.$$

- *Exponentielles Wachstum* liegt vor, wenn ein Bestand in gleichen Zeitabschnitten immer um denselben Faktor q zu- oder abnimmt. Der Bestand zum Zeitpunkt t ist dann gegeben durch

$$B(t) = B(0) \cdot q^t.$$

Beispiel. *Herr Maier zahlt derzeit 420 Euro Miete. Diese steigt jährlich um 4 %. Wie hoch ist sie in 5 Jahren? Wann wird die Miete 600 Euro überschreiten?*

Wenn ein Bestand B um p Prozent wächst, also um $\frac{p}{100}$, dann ist der Zuwachs p Prozent von B, also $B \cdot \frac{p}{100}$, der neue Bestand daher

$$B + B \cdot \frac{p}{100} = B \cdot \Big(1 + B \cdot \frac{p}{100}\Big).$$

Der Bestand wird also jährlich mit dem *Wachstumsfaktor* $q = 1 + \frac{p}{100}$ multipliziert, und nach t Jahren ist

$$B(t) = B \cdot q^t,$$

mit Anfangsbestand $B = B(0)$.

Im vorliegenden Fall ist $B = 420$, $p = 4$, der Wachstumsfaktor also $q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}04$. Damit ist die Miete nach 5 Jahren gleich

$$B(5) = 420 \cdot 1{,}04^5 \approx 511,$$

also etwa gleich 510 Euro.

Um auszurechnen, wann die Miete 600 Euro überschreitet, kann man so lange probieren, bis man den richtigen Wert gefunden hat:

t	$B(t)$
6	531
7	552
8	575
9	598
10	622

Nach 10 Jahren übersteigt die Miete 600 Euro.

Man kann dies auch ausrechnen, und zwar so:

$$\begin{aligned} 420 \cdot 1{,}04^t &= 600 && \Big| : 420 \\ 1{,}04^t &= \frac{10}{7} && \Big| \log \\ t \cdot \log(1{,}04) &= \log(\frac{10}{7}) && \Big| : \log(1{,}04) \\ t &= \frac{\log(\frac{10}{7})}{\log(1{,}04)} \end{aligned}$$

Der Taschenrechner liefert dann $t \approx 9{,}09$. Nach 9 Jahren liegt die Miete also noch knapp unter 600 Euro, nach 10 Jahren darüber.

Achtung. Wenn ein Bestand pro Zeiteinheit um p Prozent abnimmt, ist der Wachstumsfaktor (Minuswachstum) $q = 1 - \frac{p}{100}$.

Aufgaben

(1) Die Einwohnerzahl einer Stadt steigt von 4500 Einwohnern zu Beginn jährlich um 50 Einwohner.
   (a) Wie viele Einwohner hat die Stadt nach 5 Jahren, wie viele nach t Jahren?
   (b) Wann erreicht die Stadt 6000 Einwohner?

(2) Ein 90 cm hoher Baum wächst jährlich um 12 cm.
   (a) Wie hoch ist der Baum nach 10 Jahren, wie hoch nach t Jahren?
   (b) Wann erreicht der Baum eine Höhe von 3,3 m?

(3) Ein Gartenteich wird mit 3,2 m^3 pro Stunde leer gepumpt. Nach 4 h sind noch 18.500 Liter im Teich. Wie viele waren es zu Beginn?

(4) Vor der Einführung des Euro hat man für sein Geld auf dem Konto Zinsen bekommen. Wie entwickelt sich der Kontostand, wenn zu Beginn 4000 DM auf dem Konto sind und jährlich Zinsen von 3 % gezahlt werden (gefragt ist nach dem Kontostand $B(t)$ nach t Jahren)?

Wann würde der Kontostand bei gleichbleibenden Zinsen 5000 DM erreichen? Wann hätte er sich verdoppelt?

(5) Eine Bakterienkultur hat zu Beginn eine Fläche von 20 cm^2 und wächst pro Minute um 4 %. Wie groß ist sie nach einer halben Stunde? Wann hat sich die Fläche verdoppelt?

(6) Der Hochwasserpegel nimmt stündlich von 360 cm um 5% ab. Wie hoch steht das Wasser nach 6 Stunden?

Wann steht der Hochwasserpegel bei 2 Metern?

(7) Ein Kaffee ist 75° C heiß; seine Temperatur nimmt pro Minute um 8 Prozent ab. Wie hoch ist die Temperatur nach 15 Minuten? Wann erreicht der Kaffee eine Temperatur von 5° C?