INTEGRATION

F. LEMMERMEYER

(1) Bestimme eine Stammfunktion:

$$f(x) = \frac{5x+4}{x^2+x-2}$$
$$g(x) = \frac{x^4+2x^3-3x+2}{x^2-1}$$
$$h(x) = \frac{3x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}$$

Hinweis: Bei g erst Polynomdivision, bei h gibt es einen quadratischen Faktor.

(2) Bestimme eine Stammfunktion

$$f(x) = (1+2x)e^{-2x}$$
$$g(x) = 3x \cdot \sin(3x)$$
$$h(x) = 4x \cdot \ln(4x)$$

(3) Bestimme eine Stammfunktion

$$f(x) = 3x\sqrt{x^2+1}$$
$$g(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$
$$h(x) = \sin(x) \cdot (2+\cos(x))^4$$
$$k(x) = x \cdot e^{x^2-4}$$

Lösungen

(1) Ergebnisse der Partialbruchzerlegung:

$$f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+2}$$
$$g(x) = x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$
$$h(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

(2) Mit $u = 1 + 2x$ und $v' = e^{-2x}$ (damit ist $u'v$ einfacher) wird $u' = 2$ und $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, also

$$\begin{aligned}\int (1+2x)e^{-2x}\,dx &= -\tfrac{1}{2}(1+2x)e^{-2x} - \int (-e^{-2x})\,dx \\ &= -\tfrac{1}{2}(1+2x)e^{-2x} - \tfrac{1}{2}e^{-2x} \\ &= (-\tfrac{1}{2} - x)e^{-3x} - \tfrac{1}{2}e^{-2x} = -(x+1)e^{-2x}.\end{aligned}$$

Kontrolle durch Ableiten: passt.

Bei $g(x) = 3x \cdot \sin(3x)$ setzt man $u = x$ und $v' = 3\sin(3x)$ (kann man leichter aufleiten). Dann ist $u' = 1$ und $v = -\cos(3x)$. Also finden wir

$$\begin{aligned}\int 3x \cdot \sin(3x)\,dx &= -x\cos(3x) - \int (-\cos(3x))\,dx \\ &= -x\cos(3x) + \frac{1}{3}\sin(3x).\end{aligned}$$

Bestätigung durch Ableiten.

Bei $h(x) = 4x \cdot \ln(4x)$ setzen wir $u' = 4x$ und $v = \ln(4x)$. Dann ist $u = 2x^2$ und $v' = \frac{1}{x}$, also

$$\begin{aligned}\int 4x \cdot \ln(4x)\,dx &= 2x^2\ln(x) - \int 2x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= 2x^2\ln(x) - \int 2x dx = 2x^2\ln(x) - x^2.\end{aligned}$$

Bestätigung durch Ableiten.

(3) Für f setzt man $u = x^2 + 1$ und findet $du = 2x\,dx$, also $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$. Damit ist

$$\int 3x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{3}{2}\sqrt{u}\,du = \sqrt{u}^3 + c = \sqrt{x^2+1}^3 + c.$$

Kontrolle durch Ableiten.

Für g setzen wir $x^2 + a^2 = u$ und finden $du = 2x\,dx$; also ist

$$\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \int \frac{2}{\sqrt{u}}\,du = 4\sqrt{u} + c = 4\sqrt{x^2+a^2} + c.$$

Kontrolle durch Ableiten.

Mit $u = 2 + \cos(x)$ ist $du = -\sin(x)\,dx$, also

$$\int \sin(x)\cdot(2+\cos(x))^4\,dx = -\int u^4\,du = -\frac{1}{5}u^5 + c = -\frac{1}{5}(2+\cos(x))^5 + c.$$

Kontrolle durch Ableiten.

Schließlich liefert $u = x^2 - 4$ dir Beziehung $du = 2x\,dx$, also

$$\int x \cdot e^{x^2-4}\,dx = \int \frac{1}{2}e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{x^2-4}.$$