INTEGRATIONSTECHNIKEN

F. LEMMERMEYER

1. Partialbruchzerlegung

Wir wollen zeigen, wie man das Integral

$$\int \frac{x-4}{x^2+x-2}\,dx$$

berechnen kann. Wer den Nenner mit Vieta nicht direkt zerlegen kann, löst die Gleichung x^2+x-2, findet $x_1=-2$ und $x_2=1$, und hat dann

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2).$$

Mit dem Ansatz

$$\frac{x-4}{x^2+x-2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

(diese Gleichung soll für alle x gelten) finden wir durch Wegschaffen des Nenners, also Multiplikation mit $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$$x-4=A(x-1)+B(x+2).$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt

$$x-4=x(A+B)-A+2B.$$

Wenn diese Gleichung für alle x gelten soll, muss $A+B=1$ und $-A+2B=-4$ sein. Addition der beiden Gleichungen liefert $B=-1$ und damit $A=2$, und wir haben

$$\frac{x-4}{x^2+x-2}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-1},$$

was sich durch Bilden des Hauptnenners auf der rechten Seite leicht nachrechnen lässt. Damit folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{x-4}{x^2+x-2}\,dx &= \int \frac{2}{x+2}\,dx-\int\frac{1}{x-1}\,dx\\ &= 2\ln(x+2)-\ln(x-1)+c.\end{aligned}$$

Aufpassen muss man, wenn das quadratische Polynom im Nenner nicht mit x^2 beginnt. Betrachten wir dazu

$$\int \frac{5x-4}{6x^2-11x+3}\,dx.$$

Hier findet man die Nullstellen des Nenners zu $x_1 = \frac{1}{3}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$. Daraus folgt, dass $6x^2 - 11x + 3$ ein Vielfaches von $(x - \frac{1}{3})(x - \frac{3}{2})$ sein muss, und wenn man die Koeffizienten von x^2 ansieht, erkennt man, dass

$$6x^2 - 11x + 3 = 6(x - \tfrac{1}{3})(x - \tfrac{3}{2})$$

gelten muss. Die Faktoren $6 = 3 \cdot 2$ ziehen wir jetzt so in die Klammern, dass alle Brüche verschwinden:

$$6(x - \tfrac{1}{3})(x - \tfrac{3}{2}) = 3(x - \tfrac{1}{3}) \cdot 2(x - \tfrac{3}{2}) = (3x - 1)(2x - 3).$$

Ausmultiplizieren zeigt, dass die Zerlegung korrekt ist. Der Ansatz

$$\frac{5x - 4}{6x^2 - 11x + 3} = \frac{A}{3x - 1} + \frac{B}{2x - 3}$$

führt nun wie oben auf

$$\frac{5x - 4}{6x^2 - 11x + 3} = \frac{1}{3x - 1} + \frac{1}{2x - 3}$$

und damit auf

$$\int \frac{5x - 4}{6x^2 - 11x + 3}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln(3x - 1) + \tfrac{1}{2}\ln(2x - 3).$$

Übungen

(1) Bestimme Stammfunktionen der folgenden Funktionen mit Partialbruchzerlegung.

a) $\dfrac{x + 4}{(x + 5)(x + 2)}$ b) $\dfrac{x - 9}{(x + 5)(x - 2)}$

c) $\dfrac{1}{x^2 - 1}$ d) $\dfrac{1}{(x + 4)(x - 1)}$

(2) Bestimme Stammfunktionen der folgenden Funktionen mit Partialbruchzerlegung.

a) $\dfrac{x + 1}{(x - 1)^2}$ b) $\dfrac{x}{x^2 - 4x + 4}$

c) $\dfrac{2x - 1}{(x + 1)^2}$ d) $\dfrac{5x - 2}{(x + 3)^2}$

(3) Bestimme Stammfunktionen der folgenden Funktionen mit Polynomdivision und anschließender Partialbruchzerlegung.

a) $\dfrac{x^2 + 3x - 1}{(x - 1)(x + 2)}$ b) $\dfrac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x}$

c) $\dfrac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 - 1}$ d) $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 4x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}$

Lösungen.

(1) Die Stammfunktionen sind

$$\int \frac{x+4}{(x+5)(x+2)}\,dx = 4\ln(x+2) - 3\ln(x+5) + C$$
$$\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,dx = 2\ln(x+5) - \ln(x-2) + C$$
$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$$
$$\int \frac{1}{(x+4)(x-1)}\,dx = \frac{1}{5}\ln(x-1) - \frac{1}{5}\ln(x+4) + C$$

(2) Die Stammfunktionen sind

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2}\,dx = \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C$$
$$\int \frac{x}{x^2-4x+4}\,dx = \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C$$
$$\int \frac{2x-1}{(x+1)^2}\,dx = 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C$$
$$\int \frac{5x-2}{(x+3)^2}\,dx = 5\ln(x+3) + \frac{17}{x+3} + C$$

(3) In a) ist $(x-1)(x+2) = x^2+x-2$; Polynomdivision ergibt

$$x^2+3x-1 = 1\cdot(x^2+x-2) + 2x+1, \quad \text{also}$$
$$\frac{x^2+3x-1}{(x-1)(x+2)} = 1 + \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}.$$

Jetzt wende man Partialbruchzerlegung an. Die Stammfunktionen sind

$$\int \frac{x^2+3x-1}{(x-1)(x+2)}\,dx = x + \ln(x-1) + \ln(x+2) + C$$
$$\int \frac{2x^2-2x+2}{x^2-2x}\,dx = 2x - \ln x + 3\ln(x-2) + C$$
$$\int \frac{3x^2+2x+3}{x^2-1}\,dx = 3x - 2\ln(x+1) + 4\ln(x-1) + C$$
$$\int \frac{x^3+2x^2-4x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx = x + \ln x + \ln(x-2) + \ln(x+1) + C$$

2. Partielle Integration

Die Partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Integriert man diese Gleichung, erhält man

$$\int (uv)' = \int u'v + \int uv',$$

was natürlich nur eine Abkürzung für die genauere Schreibweise

$$\int (u(x) \cdot v(x))' \, dx = \int u'(x)v(x) \, dx + \int u(x)v'(x) \, dx$$

ist. Nun ist $\int (uv)' = uv$, also folgt $uv = \int u'v + \int uv'$. Angewandt wird dies in der Form

$$\int u'v = uv - \int uv'.$$

Betrachten wir beispielsweise das Integral $\int x \sin(x) \, dx$. Hier gibt es (mindestens) zwei Möglichkeiten:

(1) Wir setzen $u' = x$ und $v = \sin x$;

(2) Wir setzen $u' = \sin x$ und $v = x$.

Im ersten Fall ist $u = \frac{1}{2}x^2$ und $v' = \cos x$, und partielle Integration liefert

$$\int x \sin(x) \, dx = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \int \frac{1}{2}x^2 \cos(x) \, dx.$$

Diese Gleichung ist zwar richtig, aber das Integral auf der rechten Seite ist komplizierter als das ursprüngliche.

Im zweiten Fall ist $u = -\cos x$ und $v' = 1$, also

$$\int x \sin(x) \, dx = -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx.$$

Dies sieht viel besser aus, weil sich das Integral auf der rechten Seite ausrechnen lässt:

$$\int x \sin(x) \, dx = -x \cos x + \sin x.$$

Probe durch Ableiten ergibt

$$(-x \cos x + \sin x)' = -\cos x + x \sin x + \cos x = x \sin x$$

wie gewünscht.

Bei Integralen wie $\int \ln(x) \, dx$ hilft es, $u' = 1$ zu setzen.

Aufgaben

(1) Berechne die folgenden Integrale.

a) $\int 2x \cdot \cos(x)\,dx$ b) $\int xe^{-2x}\,dx$

c) $\int (x+1)e^{-2x}\,dx$ d) $\int x^4 \ln(x)\,dx$

3. Substitution

Die Integration durch Substitution ist die Umkehrung der Kettenregel: aus

$$u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

folgt

$$u(v(x)) = \int v'(x) \cdot u'(v(x))\,dx.$$

Im einfachsten Fall kann man die Anwendbarkeit sehen: es ist

$$\int 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2},$$

$$\int \cos(x)e^{\sin x}\,dx = e^{\sin x},$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1).$$

Dies sind im wesentlichen einfache Anwendungen folgender Regeln:

$$\int u'(x)e^{u(x)}\,dx = e^{u(x)},$$

$$\int u'(x)\cos(u(x))\,dx = \sin(u(x)),$$

$$\int u'(x)\sin(u(x))\,dx = -\cos(u(x)),$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln u(x).$$

Mit etwas Übung lernt man, solche Dinge auf Anhieb zu sehen.

Wenn man mit bloßem Auge nichts sieht, geht man anders vor. Wir betrachten noch einmal die Gleichung

$$u(v(x)) = \int u'(v(x)) \cdot v'(x)\,dx.$$

Wir setzen im rechten Integral $v(x) = z$ und $\frac{dz}{dx} = z' = v'(x)$, also $v'(x)dx = dz$. Dann ist

$$\int u'(v(x)) \cdot v'(x)\,dx = \int u'(z)\,dz = u(z),$$

also nach Rücksubstitution

$$\int u'(v(x)) \cdot v'(x)\,dx = u(v(x))$$

wie gewünscht. Diese Art von Substitution liefert also korrekte Ergebnisse; auch hier ist nicht gesagt, dass jede Substitution das Integral vereinfacht.

Betrachten wir beispielsweise

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx.$$

Mit $z = x + 1$ wird $z' = 1$, also $dz = dx$, wegen $x = z - 1$ daher

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (z-1)\sqrt{z}\,dz.$$

Mit $\sqrt{z} = z^{\frac12}$ ist $(z-1)\sqrt{z} = (z-1)z^{\frac12} = z^{\frac32} - z^{\frac12}$, also

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (z^{\frac32} - z^{\frac12})\,dz = \tfrac25 z^{\frac52} - \tfrac23 z^{\frac32}.$$

Übungsaufgaben

Alle Ergebnisse sind durch Ableiten zu kontrollieren!

(1) Bestimme eine Stammfunktion.

$$\int \frac{3x-7}{x^2-5x+6}\,dx = \qquad \int \frac{x-2}{2x^2-x-3}\,dx =$$

$$\int \frac{3}{x^2-x-2}\,dx = \qquad \int \frac{2x-1}{x^2-x-2}\,dx$$

$$\int x(1+x)^7\,dx = \qquad \int x\sqrt[3]{1+}\,dx =$$

$$\int (\sin x)^2\cos(x)\,dx = \qquad \int x\cos(2x)\,dx =$$

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)^5}\,dx = \qquad \int \frac{1}{x^2}\,\sin\frac{1}{x}\,dx =$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \qquad \int \frac{1}{e^x+1}\,dx =$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-6}\,dx = \qquad \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+e^x-6}\,dx =$$

(2) Berechne folgende Integrale mit der jeweils angegebenen Substitution:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,dx \qquad x = 2-z^2$$

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx \qquad x = 1-z^3$$

$$\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx \qquad x = \sqrt{z-1}$$

Lösungen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-4} &= \frac14 \frac{1}{x-2} - \frac14 \frac{1}{x+2} \\
\frac{x+7}{x^2-x-6} &= \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+2} \\
\frac{x+3}{x^2+x} &= \frac{3}{x} - \frac{2}{x+1} \\
\frac{x-7}{x^2+x-2} &= \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-1} \\
\frac{2x-1}{x^2-x-2} &= \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} \\
\frac{3x}{x^2-x-2} &= \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1} \\
\frac{x+6}{x^2-16} &= \frac{5}{4(x-4)} - \frac{1}{4(x+4)} \\
\frac{1-x^2}{x(x-2)^2} &=
\end{aligned}
$$