VERTIEFUNGSKURS MATHEMATIK

KOMPLEXE ZAHLEN

Die Einführung von Wurzeln aus negativen Zahlen ist den Mathematikern nicht leicht gefallen. Vom ersten Auftauchen bei den italienischen Algebraikern (im Zusammenhang mit der Lösungsformel für Gleichungen dritten Grades) zu Beginn des 17. Jahrhunderts bis zur vollen Anerkennung Mitte des 19. Jahrhunderts sind an die 150 Jahre vergangen. Heute sind sie aus Mathematik und Physik nicht mehr wegzudenken.

Zu Beginn ist der Umgang mit komplexen Zahlen Gewöhnungssache. Die wichtigste komplexe Zahl ist die Quadratwurzel aus -1, die man in der Mathematik mit i bezeichnet (und in der Elektrotechnik mit j). Sie hat die Eigenschaft $i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1}^2 = -1$. Diese Zahl ist unter den Zahlen, mit denen wir uns in der Schule befassen, nicht vorhanden, ebenso wie das Ergebnis der Division $1 : 3$ nicht unter den Zahlen vorkommt, mit denen man sich in der Grundschule beschäftigt. Man führt dafür dann in der sechsten Klasse Brüche ein. Unter den Brüchen ist wiederum keine Zahl, deren Quadrat 2 ergibt, also erweitert man den Zahlbereich durch Einführung von Quadratwurzeln wie $\sqrt{2}$, deren Zweck es ist, eine Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = 2$ zu haben.

Warum man Quadratwurzeln aus negativen Zahlen eingeführt hat, ist eine Frage, die wir erst später beantworten werden. Heute geht es nur um die Grundrechenarten für komplexe Zahlen. Komplexe Zahlen sind Zahlen der Form $a + bi$, bei denen a und b gewöhnliche reelle Zahlen sind und $i = \sqrt{-1}$ ist.

Die Addition und die Subtraktion komplexer Zahlen ist ein Kinderspiel:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

So ist beispielsweise $(1+2i)+(3-2i) = 4+0i = 4$ und $(1+2i)-(3-2i) = -2 + 4i$.

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen ist nicht viel schwiergier: man multipliziert aus und ersetzt i^2 durch -1:

$$(1 + 2i) \cdot (3 - 2i) = 3 + 6i - 2i - 4i^2 = 3 + 6i - 2i - 4(-1) = 7 + 4i.$$

Schließlich muss man komplexe Zahlen auch dividieren können. Dies macht man, indem man den Nenner rational macht. Dies kann man bei gewöhnlichen Brüchen mit Quadratwurzeln auch machen:

$$\begin{aligned}\frac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} &= \frac{(3+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} && \Big| \text{ Erweitern mit } 1-\sqrt{2} \\ &= \frac{3+\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2}{1-2} && \Big| \text{ Ausmultiplizieren} \\ &= \frac{1-2\sqrt{2}}{-1} = -1+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Kontrollieren kann man das durch Ausmultiplizieren:

$$(-1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = -1+2\sqrt{2}-\sqrt{2}+4 = 3+\sqrt{2}.$$

Ebenso macht man das mit komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned}\frac{3-2i}{1+2i} = \frac{(3-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} &= \frac{3-2i-6i+4i^2}{1-4i^2} \\ = \frac{3-8i+4(-1)}{1-4(-1)} &= \frac{-1-8i}{5} = -\frac{1}{5}-\frac{8}{5}i.\end{aligned}$$

Kontrolle durch Ausmultiplizieren:

$$(-\tfrac{1}{5}-\tfrac{8}{5}i)(1+2i) = -\tfrac{1}{5}-\tfrac{8}{5}i-\tfrac{2}{5}i-\tfrac{16}{5}i^2 = -\tfrac{1}{5}-\tfrac{10}{5}i+\tfrac{16}{5} = 3-2i.$$

Übungen

(1) Berechne:

a) $(1+i)-(2+3i)$ b) $3(1+2i) =$

c) $i^3 =$ d) $(2+3i)i =$

(2) Berechne:

a) $(2+i)^2 =$ b) $(1-i)(3+3i) =$

c) $(3-3i)^2 =$ d) $(1+i)^3 =$

(3) Berechne:

a) $\frac{3+i}{1+i} =$ b) $\frac{3+4i}{1-2i} =$

c) $\frac{3+4i}{1+2i} =$ d) $\frac{2-i}{2} =$

(4) Berechne.

a) $(a+bi)(c+di) =$ b) $\dfrac{a+bi}{c-di} =$

c) $(a+bi)^2 =$ d) $(a+bi)^3 =$

Lösungen

(1) Berechne:

a) $(1+i)-(2+3i) = -1-2i$ b) $3(1+2i) = 3+6i$
c) $i^3 = -i$ d) $(2+3i)i = -3+2i$

(2) Berechne:

a) $(2+i)^2 = 3+4i$ b) $(1-i)(3+3i) = 6$
c) $(3-3i)^2 = -18i$ d) $(1+i)^3 = -2+2i$

Zu d): $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$, also $(1+i)^3 = 2i(1+i) = 2i+2i^2 = -2+2i$.

(3) Berechne:

a) $\dfrac{3+i}{1+i} = 2-i$ b) $\dfrac{3+4i}{1-2i} = -1+2i$
c) $\dfrac{3+4i}{1+2i} = \dfrac{11}{5} - \dfrac{2}{5}i$ d) $\dfrac{2-i}{2} = 1 - \dfrac{1}{2}i$

(4) Berechne.

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(c+di) &= ac-bd+(ad+bc)i \\
\frac{a+bi}{c-di} &= \frac{ac-bd}{c^2+d^2} + \frac{ad+bc}{c^2+d^2}i \\
(a+bi)^2 &= a^2-b^2+2abi \\
(a+bi)^3 &= a^3-3ab^2+(3ab^2-b^3)i
\end{aligned}
$$