VERTIEFUNGSKURS MATHEMATIK

KLAUSUR 3

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Punkte (max)	9	2	2	2	3	8	6	4	4	6	4
Punkte											

(1) Gegeben sind die Permutationen $\pi = (135)$ und $\sigma = (1254)$ in S_5 .

a) Berechne $\pi\sigma$ und $\sigma\pi$.

b) Berechne σ^k für $k = 2, 3, 4$ und $k = 8$.

c) Bestimme π^{12}, π^{14} und σ^{101}.

(2) Schreibe die Permutation $(124)(425)(64)$ in der üblichen Schreibweise (multipliziere aus).

(3) Gib alle Permutationen π in S_3 an, welche die 1 auf die 2 abbilden.

(4) Gib eine Permutation der Ordnung 6 in S_5 an.

(5) Begründe, warum $(123) = (231)$ ist. Gib alle möglichen Schreibweisen für die Permutation (1234) an.

(6) Berechne die folgenden Produkte.

$$
\begin{aligned}
(12)(345)(12) &= \\
(12)(145)(12) &= \\
(12)(245)(12) &= \\
(12)(3245)(12) &= \\
(12)(1245)(12) &=
\end{aligned}
$$

Beachte dabei die vorige Aufgabe.

Gib eine Regel an, mit der man Produkte der Form $(12)\pi(12)$ schnell angeben kann. Prüfe die Regel an einem von Dir gewählten Beispiel.

(7) Bestimme alle Permutationen π in S_4 mit $\pi^2 = (13)$.

Hinweis: Begründe nacheinander.

a) π muss ein Zyklus der Länge 4 sein.

b) π muss die Form $\pi = (1\ *\ 3\ *)$ haben.

c) Schreibe alle Möglichkeiten für π auf.

d) Schreibe alle Lösungen der Gleichung $\pi^2 = (13)$ in S_5 auf.

(8) Zeige, dass $\pi^{-1} = (132)$ die Umkehrpermutation von $\pi = (123)$ ist, dass also $\pi\pi^{-1} = \mathrm{id}$ ist.

Bestimme die Umkehrpermutation π^{-1} von $\pi = (1324)$.

Zeige, dass (13)(245) die Umkehrpermutation von (254)(13) ist.

(9) Löse die Gleichungen $\chi(1324) = (12)$ und $(1324)\chi = (13)$.

Hinweis: Multipliziere mit der Umkehrpermutation von $\pi = (1324)$ von rechts bzw. von links. Man kann χ aber auch durch Überlegen bestimmen.

(10) Man kann jede Permutation als Produkt von Transpositionen schreiben, also von "Vertauschungen" (ab).

a) Zeige, dass (123) das Produkt der Transpositionen (13) und (23) ist.

b) Schreibe (234) als Produkt zweier Transpositionen.

c) Schreibe (1234) als Produkt von drei Transpositionen.

(11) Schreibe alle Permutationen in S_4 auf, welche die 3 fest lassen.

Wie viele Permutationen in S_5 lassen die 3 fest?

Lösungen

(1) a) $\pi\sigma = (134)(25)$, $\sigma\pi = (12)(354)$.

b) $\sigma^2 = (15)(24)$, $\sigma^3 = (1452)$, $\sigma^4 = \mathrm{id}$, $\sigma^8 = \mathrm{id}$.

c) $\pi^{12} = \mathrm{id}$, $\pi^{14} = \pi^2 = (153)$, $\sigma^{101} = \sigma = (1254)$.

(2) $(124)(425)(64) = (1564)$.

(3) $\pi_1 = (12)$, $\pi_2 = (123)$.

(4) $\sigma = (123)(45)$ hat Ordnung 6.

(5) Beide Permutationen schieben die 1 auf die 2, die 2 auf die 3 und die 3 auf die 1. Weiter ist $(1234) = (2341) = (3412) = (4123)$.

(6) Berechne die folgenden Produkte.

$$\begin{aligned}
(12)(345)(12) &= (345)\\
(12)(145)(12) &= (245)\\
(12)(245)(12) &= (145)\\
(12)(3245)(12) &= (3145)\\
(12)(1245)(12) &= (2145)
\end{aligned}$$

Die Permutation $(12)\pi(12)$ erhält man, wenn man die in π auftretenden Zahlen 1 und 2 vertauscht.

(7) Bestimme alle Permutationen π in S_4 mit $\pi^2 = (13)$.

a) Weil $\pi^4 = \mathrm{id}$ und $\pi^2 = (13)$ ist, muss π Ordnung 4 haben, also ein Zyklus der Länge 4 sein.

b) π muss die Form $\pi = (1\ *\ 3\ *)$ haben, damit π^2 die 1 auf die 3 schiebt.

c) Es muss also $\pi = (1234)$ oder $\pi = (1432)$ sein

d) Wegen $\pi^2 = (13)(24)$ in beiden Fällen gibt es keine Permutation in S_4 mit $\pi^2 = (13)$.

(8) Die Umkehrpermutation von $\pi = (123)$ schiebt die 1 auf die 3, die 3 auf die 2, ist also gleich $\pi^{-1} = (132)$.

Die Umkehrpermutation von $\pi = (1324)$ ist $\pi^{-1} = (1423)$.

Die Umkehrpermutation von $(254)(13)$ ist $(13)(245)$, denn es ist

$$(254)(13)(13)(245) = (254)(245) = \mathrm{id}.$$

(9) Löse die Gleichungen $\chi(1324) = (12)$ und $(1324)\chi = (13)$.

Multiplikation der ersten Gleichung mit (1423) von rechts ergibt $\chi = (12)(1423) = (13)(24)$.

Multiplikation der zweiten Gleichung mit (1423) von links ergibt $\chi = (1423)(13) = (142)$.

(10) a) $(13)(23) = (123)$.

b) $(234) = (24)(34)$.

c) $(1234) = (13)(14)(23)$.

(11) Dies sind id, (12), (14), (24), (124), (142).

Die 1 kann man auf vier, die 2 auf drei, die 4 auf zwei und die 5 auf das letzte verbliebene Element schieben, also gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ solcher Permutationen.