VERTIEFUNGSKURS MATHEMATIK

F. LEMMERMEYER

(1) Zeige, dass $x = a$ Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ ist, und bestimme alle Lösungen dieser Gleichung.

$f(x)$	a
$x^3 - 4x^2 - 7x + 10$	1
$2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$	2

(2) Zeige, dass $x = i$ und $x = -i$ Lösungen der Gleichung

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$$

sind, und bestimme alle Lösungen mittels Polynomdivision durch x^2+1.

(3) Löse die folgenden Gleichungen in den komplexen Zahlen:

$$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$$

$$2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$$

(4) Berechne

a) $(3 + i)(1 - 2i) =$ b) $\dfrac{3+i}{2+2i} =$

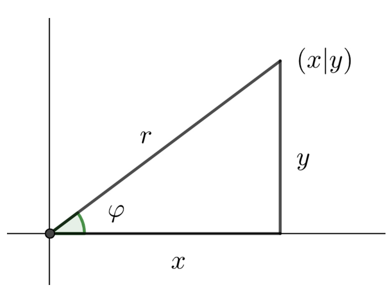
c) $|5 + 12i| =$ d) $i^{97} =$

(5) Ziehe die Quadratwurzel:

a) $\sqrt{3-4i} =$ b) $\sqrt{5+12i} =$

c) $\sqrt{8i} =$ d) $\sqrt{4i} =$

(6) Erkläre anhand einer Skizze, wie man kartesische Koordinaten $P(x|y)$ in Polarkoordinaten (r, ϕ) umwandelt:



1. Antworten

(1) Zeige, dass $x = a$ Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ ist, und bestimme alle Lösungen dieser Gleichung.

$f(x)$	a
$x^3 - 4x^2 - 7x + 10$	1
$2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$	2

a) $f(1) = 0$, $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x-1)(x^2 - 3x - 10) = (x-1)(x-5)(x+2)$.

Lösungen $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = -3$.

b) $f(2) = 0$, $2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 = (x-2)(x-3)(2x-1)$.

Lösungen $x_2 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

(2) Zeige, dass $x = i$ und $x = -i$ Lösungen der Gleichung

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$$

sind, und bestimme alle Lösungen mittels Polynomdivision durch x^2+1.

$f(i) = f(-i) = 0$. $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x^2+1)(x-2)(x+1)$.

Lösungen $x_{1,2} = \pm i$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

(3) Löse die folgenden Gleichungen in den komplexen Zahlen:

$$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$$
$$2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$$

a) $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_{3,4} = \pm 1$.

b) $2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \pm i$.

(4) Berechne

a) $(3+i)(1-2i) = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$ b) $\dfrac{3+i}{2+2i} = 1 - \frac{1}{2}i$

c) $|5+12i| = 13$ d) $i^{97} = i$

(5) Ziehe die Quadratwurzel:

a) $\sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$ b) $\sqrt{5+12i} = \pm(3+2i)$

c) $\sqrt{8i} = \pm(2+2i)$ d) $\sqrt{4i} = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$

(6) $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad \tan\phi = \frac{x}{y}$, also $\phi = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$.

$x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$.