ANALYSIS

FRANZ LEMMERMEYER

Zu jedem $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = x + t \sin x; \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

Ihr Schaubild sei K_t.

(a) Untersuche K_1 und K_2 auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

Zeichne K_1 und K_2 in dasselbe Koordinatensystem (1 LE 2 cm).

Für welche t besitzt K_t einen Hoch- und einen Tiefpunkt?

(b) Die Kurve K_t $(0 < t \le 1)$, die Gerade $x = 2\pi$ und die x-Achse begrenzen eine Fläche.

Zeige, dass der Inhalt A dieser Fläche von t unabhängig ist.

Für welches t wird diese Fläche durch die Gerade $x = \pi$ halbiert?

(c) Die Tangenten an K_t i n$O(0|0)$ uznd $C(2\pi|2\pi)$, die x-Achse und die Gerade $y = 2\pi$ bilden ein Parallelogramm $OBCD$.

Ermittle die Koordinaten der Eckpunkte B und D.

Berechne den Flächeninhalt $A(t)$ des Parallelogramms.

Für welches t ist $A(t)$ gleich dem in (b) berechneten Flächeninhalt A?

Hinweise.

Bei (a) sollte es keine Probleme geben. K_1 hat einen Sattelpunkt; K_2 hat Tief, Wende- und Hochpunkt. Extrempunkte existieren für $t > 1$.

Bei (b) muss man aufpassen: Das Schaubild liegt oberhalb der x-Achse (warum ist das wichtig?), aber das muss man erst begründen! Der Flächeninhalt ist dann $A = 2\pi^2$. Die Fläche wird von $x = \pi$ halbiert, wenn $t = \pi^2/4$ ist.

Bei (c): Skizze machen und überlegen, welche Seite man als Grundseite wählt, damit man den Flächeninhalt möglichst billig bekommt. Flächeninhalt ist $A(t) = 4\pi^2 \cdot \frac{t}{1+t}$.

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 + 2x^2 + tx; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Schaubild sei K_t.

(a) Untersuche K_t auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

Zeichne K_3 für $-4 \le x \le 0,5$ (1 LE 2 cm).

(b) Bestimme die Gleichung der Kurve C, auf der die Wendepunkte aller K_t liegen.

Für welches t schneidet C die Kurve K_t im Wendepunkt senkrecht?

(c) Für welches t ist die Normale im Punkt $W_t(-\frac{2}{3}t| - \frac{2}{27}t^2)$ von K_t eine Ursprungsgerade?

Für dieses t bilden die Normale und die Tangente in W_t zusammen mit der x-Achse ein Dreieck. Dieses Dreieck rotiert um die x-Achse.

Berechne das Vaolumen des dabei enstehenden Drehkörpers.

(d) Kt und K_u mit $t < u$ schließen im 3. Quadranten eine Fläche ein. Berechne den Inhalt dieser Fläche.

Hinweise. a) $H(-t|0)$; $T(-\frac{t}{3}| - \frac{4t^2}{27})$; $W(-\frac{2}{3}t| - \frac{4t^2}{27})$ Zur Erinnerung: Bei Kurven vom Grad 3 ist der Wendepunkt immer der Mittelpunkt von Hoch- und Tiefpunkt (falls es welche gibt). Ist für die Probe hilfreich.

b) Die Ortskurve hat die Gleichung $y = -\frac{1}{6}x^2$. Für $t = \frac{3}{2}\sqrt{6}$ schneiden sich C und K_t senkrecht.

c) Für $t = 3\sqrt{3}$ geht die Normale durch den Ursprung. Der Doppelkegel hat Volumen $V = \frac{32\pi}{9}\sqrt{3}$.

d) Der Flächeninhalt ist $A = \frac{tu}{4}(u - t)$.