ÜBUNGSAUFGABEN TEST 1

FRANZ LEMMERMEYER

Komplexe Zahlen

Mit $i = \sqrt{-1}$ rechnet man wie gewöhnlich und benutzt $i^2 = -1$. Division durch Erweitern mit der Konjugierten $a - bi$ des Nenners $a + bi$. Der Betrag einer komplexen Zahl $a + bi$ ist der Abstand der Zahl zum Ursprung, also $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\begin{aligned}
7 + 2i \ + \ 5 - i &= \\
7 + 2i \ - \ (5 - i) &= \\
(7 + 2i)(5 - i) &= \\
\frac{5 - 3i}{1 - i} &= \\
\frac{13}{3 + 2i} &= \\
|5 + i| &= \\
\sqrt{21 - 20i} &= \\
\sqrt{-8i} &=
\end{aligned}$$

Horner-Schema

Sei $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 8$. Um $f(2)$ zu bestimmen, beginnt man mit dem Schema

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -4 & 0 & -8 \\ & 0 & & & \\ \hline 2 & & & & \end{array}$$

(oben die Koeffizienten; erste Zahl in der zweiten Zeile ist immer 0; links unten die Stelle, an welcher der Funktionswert bestimmt werden soll) und füllt es aus, indem man die Zahlen vertikal addiert, dann mit 2 multipliziert und in die nächste freie Stelle der zweiten Zeile schreibt. Der Funktionswert erscheint rechts unten:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -4 & 0 & -8 \\ & 0 & 6 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

Wegen $f(2) = 0$ geht die Division $(3x^3 - 4x^2 - 8) : (x - 2)$ auf, und unterste Zeile des Horner-Schemas liefert $(3x^3 - 4x^2 - 8) : (x - 2) = 3x^2 + 2x + 4$.

Bestimmung von $f(3)$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -4 & 0 & -8 \\ & 0 & 9 & 15 & 45 \\ \hline 3 & 3 & 5 & 15 & 37 \end{array}$$

Es ist $f(3) = 3$ sowie $\frac{3x^3-4x^2-8}{x-3} = 3x^2 + 5x + 15 + \frac{37}{x-3}$.

Zeige, dass in den folgenden Aufgaben $f(a) = 0$ ist, und bestimme den Quotienten $\frac{f(x)}{x-a}$ mit dem Hornerschema.

a	$f(x)$
1	$x^4 - x^2 - 2x + 2$
-2	$x^4 + x^3 + 7x + 6$
1	$x^3 + (3a - 2)x^2 + (1 - 6a)x - 2$

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen $ax' + by = 0$ oder $ay'' + by' + cy = 0$ löst man mit dem Ansatz $y = e^{kx}$. Einsetzen von y, $y' = ke^{kx}$ und $y'' = k^2e^{kx}$ liefert wegen $e^{kx} \neq 0$ die quadratische Gleichung $ak^2 + bk + c = 0$.

Löse die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} y'' - 5y' + 4y &= 0 \\ y'' + y' - 6y &= 0 \\ 2y'' + 3y' - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen

$$\begin{aligned}
7+2i \ + \ 5-i &= 12+i \\
7+2i \ - \ (5-i) &= 2+3i \\
(7+2i)(5-i) &= 37+3i \\
\frac{5-3i}{1-i} &= 4+I \\
\frac{13}{3+2i} &= \frac{13(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{13(3-2i)}{13} = 3-2i \\
|5+i| &= \sqrt{26} \\
\sqrt{21-20i} &= \pm(5-2i) \\
\sqrt{-8i} &= \pm(2-2i)
\end{aligned}$$

Aus $\sqrt{-8i} = a+bi$ erhält man $-8i = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Vergleichen von Real- und Imaginärteil liefert die beiden Gleichungen $a^2 - b^2 = 0$ und $2ab = -8$, also $a^2 = b^2$ und $ab = -4$.

Standardlösung: Einsetzen von $b = -\frac{4}{a}$ in die erste Gleichung liefert $a^4 - 16 = 0$, also $a = \pm 2$. Falls $a = 2$, folgt $b = -\frac{4}{a} = -2$ usw.

Hier kann man auch aus der ersten $a = \pm b$ ablesen und in die zweite Gleichung einsetzen. Mit $b = a$ folgt $a^2 = -4$ (keine reelle Lösung); mit $b = -a$ wird $-a^2 = -4$, also $a = \pm 2$.

Differentialgleichungen. $y'' - 5y' + 4y = 0$; Ansatz $y = e^{kx}$ liefert $k^2 - 5k + 4 = (k-1)(k-4) = 0$; also sind $y_1 = e^x$ und $y_2 = e^{4x}$ spezielle Lösungen. Die allgemeine Lösung ist

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$$

mit Konstanten c_1, c_2.

Lösungen:

$$\begin{aligned}
y'' - 5y' + 4y = 0 \qquad & y = c_1 e^x + c_2 e^{4x} \\
y'' + y' - 6y = 0 \qquad & y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \\
2y'' + 3y' - 2y = 0 \qquad & y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-2x}
\end{aligned}$$