ÜBUNGSAUFGABEN

FRANZ LEMMERMEYER

1. Das Horner-Schema

Das Horner-Schema ist eine effektive Methode zur Polynomdivision. Diese sollte man sowohl mit als auch ohne Horner-Schema ausführen können.

Sei $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 8$. Um $f(2)$ zu bestimmen, beginnt man mit dem Schema

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -4 & 0 & -8 \\ & 0 & & & \\ \hline 2 & & & & \end{array}$$

(oben die Koeffizienten; erste Zahl in der zweiten Zeile ist immer 0; links unten die Stelle, an welcher der Funktionswert bestimmt werden soll) und füllt es aus, indem man die Zahlen vertikal addiert, dann mit 2 multipliziert und in die nächste freie Stelle der zweiten Zeile schreibt. Der Funktionswert erscheint rechts unten:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -4 & 0 & -8 \\ & 0 & 6 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

Wegen $f(2) = 0$ geht die Division $(3x^3 - 4x^2 - 8) : (x - 2)$ auf, und unterste Zeile des Horner-Schemas liefert $(3x^3 - 4x^2 - 8) : (x - 2) = 3x^2 + 2x + 4$.

Bestimmung von $f(3)$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -4 & 0 & -8 \\ & 0 & 9 & 15 & 45 \\ \hline 3 & 3 & 5 & 15 & 37 \end{array}$$

Es ist $f(3) = 3$ sowie $\frac{3x^3-4x^2-8}{x-3} = 3x^2 + 5x + 15 + \frac{37}{x-3}$.

Zeige, dass in den folgenden Aufgaben $f(a) = 0$ ist, und bestimme den Quotienten $\frac{f(x)}{x-a}$ mit dem Hornerschema.

a	$f(x)$
1	$x^4 - x^2 - 2x + 2$
-2	$x^4 + x^3 + 7x + 6$
1	$x^3 + (3a-2)x^2 + (1-6a)x - 2$

Übungsaufgaben:

(1) Sei $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + 6$.

a) Zeige $f(3) = 0$ mit dem Hornerschema.

b) Bestimme $f(x) : (x-3)$ durch Polynomdivision.

c) Bestimme $f(x) : (x-3)$ mit dem Hornerschema.

(2) Berechne $(x^3 + (a+2)x^2 + (2a+3)x + 6) : (x+2)$ mit dem Hornerschema.

2. Reziproke Polynome

Nullstellen von Polynomen vom Grad 3 und höher lassen sich mit Schulmitteln nur lösen, wenn man eine oder mehrere Lösungen erraten kann; dann führt man Polynomdivisionen durch, bis man ein Polynom erhält, das man mit Standardmethoden (Substitution, quadratische Gleichungen) behandeln kann.

Reziproke Gleichungen von ungeradem Grad haben immer $x = -1$ als Lösung. Reziproke Gleichungen vom Grad 4 (oder 6) löst man durch Division mit x^2 (bzw. x^3).

Beispiel: $2x^4 - 11x^3 + 19x^2 - 11x + 2 = 0$. Dies ist eine reziproke Gleichung, weil die Koeffizienten von vorn und von hinten gelesen gleich sind.

$$\begin{aligned}
2x^4 - 11x^3 + 19x^2 - 11x + 2 &= 0 && \Big| : x^2 \neq 0 \\
2x^2 - 11x + 19 - \frac{11}{x} + \frac{2}{x^2} &= 0 \\
2\Big(x^2 + \frac{1}{x^2}\Big) - 11\Big(x + \frac{1}{x}\Big) + 19 &= 0
\end{aligned}$$

Jetzt setzt man $z = x + \frac{1}{x}$ und erhält $z^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, also $x^2 + \frac{1}{x^2} = z - 2$:

$$\begin{aligned} 2(z^2-2) - 11z + 19 &= 0 \\ 2z^2 - 11z + 15 &= 0 \\ (2z-5)(z-3) &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $z_1 = 3$ und $z_2 = \frac{5}{2}$. Resubstitution ergibt die beiden Gleichungen

$$x + \frac{1}{x} = 3 \quad \text{bzw.} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}.$$

Dies führt nach Multiplikation mit x zu den beiden quadratischen Gleichungen

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Diese haben die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \ x_4 = 2.$$

Randbemerkung: In der Tat ist

$$2x^4 - 11x^3 + 19x^2 - 11x + 2 = (x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 5x + 2);$$

wir haben mit obiger Technik also das Polynom vom Grad 4 in zwei quadratische Faktoren aufgelöst.

(1) Löse folgende Gleichungen durch Erraten einer Nullstelle und Polynomdivision:
   (a) $x^3 - 2x^2 + 7x - 6 = 0$
   (b) $x^3 - 13x - 12 = 0$
   (c) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$
   (d) $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$.

(2) Berechne:
   (a) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 2) =$
   (b) $(x^3 - 8) : (x - 2) =$

(3) Löse folgende Gleichungen
   (a) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$
   (b) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$

(4) Löse durch geschicktes Ausklammern:

$$x^3 + x^2 - ax - a = 0.$$

(5) Löse folgende reziproke Gleichung

$$2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0.$$

(6) Löse durch geschicktes Ausklammern:

a) $x^3 - 2x^2 - ax + 2a = 0.$

b) $x^3 - ax^2 - x + a = 0$

Hinweis: Aus den letzten beiden Termen in a) kann man a ausklammern. Wie kommt man dann weiter?

3. Geometrische Folgen und Reihen

Die Standardfragen sind:

- Summierung von Reihen der Form

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$
$$T = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots$$
$$U = 1 + 3q + 5q^2 + 7q^3 + \ldots$$

usw.; am einfachsten geht das durch Multiplikation mit q und anschließender Subtraktion.

- Verwandlung periodischer Dezimalzahlen in Brüche:

$$x = 0{,}151515\ldots \qquad 100x = 15{,}151515\ldots$$

ergibt $x = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$.

(1) Berechne bzw. schreibe als Bruch.

(a) $0{,}45454545\ldots =$

(b) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^9} =$

(c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots =$

(d) $5^6 + 5^7 + 5^8 + \ldots + 5^{20} =$

(2) Berechne bzw. schreibe als Bruch.

(a) $0{,}255255255\ldots =$

(b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{10}} =$

(c) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \mp \ldots =$

(d) $3^6 + 3^7 + 3^8 + \ldots + 3^{20} =$

(3) Bestimme die unendliche geometrische Reihe
$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$
für $-1 < q < 1$, und leite daraus den Wert der Summe
$$1 + \frac{x+1}{x} + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + \cdots$$
für $x < 0$ her; vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich.

(4) Zeige, dass
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{4^n} < \frac{4}{3}$$
ist.

(5) Zeige, dass für $-1 < q < 1$
$$1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots = \frac{1}{(1-q)^2}$$
gilt.

Bestimme weiter die Summe
$$1 - 2q + 3q^2 - 4q^3 + \ldots$$
für $-1 < q < 1$.

(6) Die ersten drei Glieder einer geometrischen Reihe sind x, $x-9$ und $x-15$. Bestimme das 4. Glied der Folge, sowie die Summe der entsprechenden unendlichen geometrischen Reihe.

(7) Die ersten drei Glieder einer geometrischen Reihe sind x, $x-3$ und $x-5$. Bestimme das 4. Glied der Folge, sowie die Summe der entsprechenden unendlichen geometrischen Reihe.

(8) Bestimme die Summe der unendlichen Reihe

$$1 + x + ax^2 + bx^3 + a^2x^4 + b^2x^5 + a^3x^6 + b^3x^7 + \ldots.$$

Hinweis: Geschicktes Aufteilen der Reihe in zwei Einzelsummen.

(9) Berechne

$$S = 1 + 3q + 5q^2 + 7q^3 + 9q^4 + \ldots$$