VERTIEFUNGSKURS MATHEMATIK

ÜBUNGEN

1. Permutationen

Eine Permutation von Objekten ist eine Abbildung, die deren Reihenfolge verändert. Die Permutation (132) bildet etwa die 1 auf die 3, die 3 auf die 2 und die 2 wieder auf die 1 auf. Fasst man (132) als Permutation auf vier Elementen auf, dann wird 4 auf sich selbst abgebildet.

Zwei Permutationen kann man verknüpfen, in dem man sie hintereinander ausführt. Ist $\pi = (12)$ und $\sigma = (132)$, dann ist $\pi\sigma = (1)(23)$, denn 1 wird von π auf 2 und 2 von σ auf 1 abgebildet.

Man kann alle Permutationen von n Elementen auf diese Art verknüpfen; wir bezeichnen die Menge dieser Permutationen mit S_n. In der Mathematik nennt man eine Menge wie S_n mit einer Verknüpfung eine Gruppe, wenn gewissen Eigenschaften erfüllt sind:

- Man muss zwei beliebige Elemente verknüpfen können; das ist hier der Fall.
- Es muss ein neutrales Element geben; das ist hier die identische Permutation, die jede Zahl auf sich selbst abbildet.
- Zu jeder Permutation π muss es eine Permutation π^{-1} geben, deren Verknüpfung das neutrale Element, also die identische Permutation ergibt. Das ist hier die Permutation, die eine gegebene Permutation rückgängig macht.
- Es muss das Assoziativgesetz gelten, wonach das Ergebnis einer Verknüpfung nicht von der Klammersetzung abhängt:
$$\pi(\rho\sigma) = (\pi\rho)\sigma.$$

Die zu $\pi = (132)$ inverse Permutation ist $\pi^{-1} = (132)$. In der Tat schickt π die 1 auf die 2, π^{-1} die 2 auf die 1. Man kann auch einfach nachrechnen, dass $(123)(132) = (1)$ die identische Permutation ist.

Die Ordnung einer Permutation π ist die kleinste positive Zahl n, für welche $\pi^n = (1)$ ist.

(1) In S_4 betrachten wir die Permutationen $\pi = (1234)$ und $\sigma = (13)$.

Berechne $\pi\sigma$ und $\sigma\pi$.

Berechne die ersten vier Potenzen von π und σ und bestimme deren Ordnung.

Berechnung von $\pi\sigma$: Wir beginnen mit der 1; diese wird von π auf die 2 abgebildet, und die 2 bleibt unter σ fest; also geht 1 auf die 2. Die 2 wird von π auf die 3 abgebildet, von σ auf die 1; also haben wir (12). Als nächstes Element betrachten wir 3; diese geht unter π auf die 4, die unter σ fest bleibt. Die 4 wird von π auf die 1 und diese von σ auf die 3 abgebildet. also ist

$$\pi\sigma = (12)(34).$$

(2) Sei $\pi = (123456) \in S_6$; berechne π^k für $1 \le k \le 6$.

(3) Zeige, dass (12345) die Ordnung 5 hat, und allgemein, dass $(123\cdots n)^k = (1)$ für $k = n$, aber kein kleineres $k > 0$ gilt.

(4) Zeige, dass die Permutationen (12)(34) und (13)(24) Ordnung 2 haben.

(5) Zeige, dass die Permutation (12)(23) Ordnung 3 hat.

(6) Seien $1 \le a < b < c < d \le n$ vier verschiedene Zahlen. Zeige, dass $(ab)(cd)$ Ordnung 2 hat, $(ab)(bc)$ dagegen nicht.

Berechne π^{-1} für $\pi = (a,b)(cd)$, sowie für $\pi = (ab)(bc)$ und $\pi = (abcd)$.

(7) Gegeben sind die Permutationen $\pi = (135)$ und $\sigma = (543)$ in S_5. Bestimme m und n so, dass $\pi^m\sigma^n = (143)$ ist. Hinweis; Die 5 bleibt fest.

(8) Berechne alle Quadrate σ^2 der 6 Permutationen σ in S_3.

Welche Permutationen in S_3 sind dritte Potenzen?

(9) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\chi^2 = (123)$$

in S_3, S_4 und S_5.

(10) Bestimme alle Fixpunkte (Zahlen, die von einer Permutation fest gelassen werden) von $\sigma = (12)$ in S_3 bzw. in S_4.

(11) Bestimme alle Fixpunkte von $\sigma = (12)(34)$ in S_4 und S_5.

(12) Bestimme die größte Ordnung, die eine Permutation in S_n ($n = 3, 4, 5, \ldots, 8$) haben kann.

Hinweis: Die Ordnung eines Elements ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Längen seiner Zyklen. So hat das Element $(123)(45)$ in S_5 die Ordsnung $3 \cdot 2 = 6$.

(13) Bestimme die größte Ordnung, die eine fixpunktfreie Permutation in S_n ($n = 3, 4, 5, \ldots, 8$) haben kann.

(14) Die von einem Element σ erzeugte Gruppe $\langle\sigma\rangle$ besteht aus allen Elementen der Form σ^k. Bestimme die von

a) $\sigma = (12)$

b) $\sigma = (123)$

erzeugten Untergruppen von S_3.

(15) Bestimme die von $\sigma = (123)$ bzw von $\tau = (12)(34)$ erzeugten Untergruppen in S_4.

(16) Die von $\sigma = (12)$ und $\tau = (34)$ erzeugte Untergruppe $\langle\sigma, \tau\rangle$ in S_4 besteht aus allen Produkten von Potenzen von σ und τ, insbesondere enthält diese Untergruppe alle Permutationen $\sigma^i \tau^k$ (bei denen man natürlich $i \le 3$ und $k \le 2$ voraussetzen darf – warum?). Bestimme alle Elemente dieser Untergruppe.

2. Aufgaben TdK 2019

(1) In der symmetrischen Gruppe S_8 sind

$$\sigma = (1582476) \quad \text{und} \quad \tau = (2345)(168)$$

gegeben.

a) Geben Sie die Permutationen $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^{-1} und τ^{-1} in Zykelschreibweise an.

b) Bestimmen Sie die Ordnungen von σ und τ.

c) Bestimmen Sie die Permutationen σ^4, σ^7, τ^2 und τ^{51}.

(2) Wir betrachten Permutationen in S_6. Lösen Sie die Gleichungen

$$(1265)\chi = (345)$$
$$\xi(12)(56) = (124653).$$

(3) Gegeben sind die beiden Permutationen $\alpha = (234567)$ und $\beta = (1357246)$ in S_7. Bestimmen Sie die Zahlen m und n so, dass die Gleichung

$$\alpha^n \beta^m = (12)$$

erfüllt ist.

(4) Wie viele Lösungen in der symmetrischen Gruppe S_5 hat die folgende Gleichung?

$$\chi\xi = (142)(35)$$

(5) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\chi^2 = (123)$$

in S_7.

(6) Begründen Sie, warum eine Permutation der Ordnung 2 in S_9 nicht fixpunktfrei sein kann.

(7) Wie groß muss n mindestens sein, damit S_n ein Element der Ordnung 120 enthalten kann?