VERTIEFUNGSKURS MATHEMATIK K2

ÜBUNGKLAUSUR 1

Zu jedem $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben mit

$$f_t(x) = e - e^{tx}.$$

Ihr Schaubild sei K_t.

a) K_t schneidet die x-Achse in N_t, die y-Achse in R. Bestimme N_t und R und gib die Steigungen von f_t in diesen Punkten an.

Untersuche K_t auf Asymptoten.

Zeichne K_1 für $-3 \leq x \leq 1,5$ (1 LE 2 cm).

b) Stelle die Gleichung der Tangente g_t an K_t in N_t auf.

Zeige, dass ich alle diese Tangenten in einem gemeinsamen Punkt S schneiden.

Berechne die Koordinaten von S.

c) K_t hat in R die Tangente h_t und die Normale n_t. Diese schneiden aus der x-Achse eine Strecke aus.

Bestimme t so, dass die Länge dieser Strecke ein Extremum wird. Zeige, dass es sich um ein Minimum handelt.

Berechne für dieses t die Länge der Strecke.

d) K_t, Die Tangente g_t in N_t, die Geraden $y = x$ und $x = u$ $(u < 0)$ umschließen eine Fläche. Berechne ihren Inhalt $A_t(u)$. Wie verhält sich $A_t(u)$ für $u \to -\infty$?

Lösungen

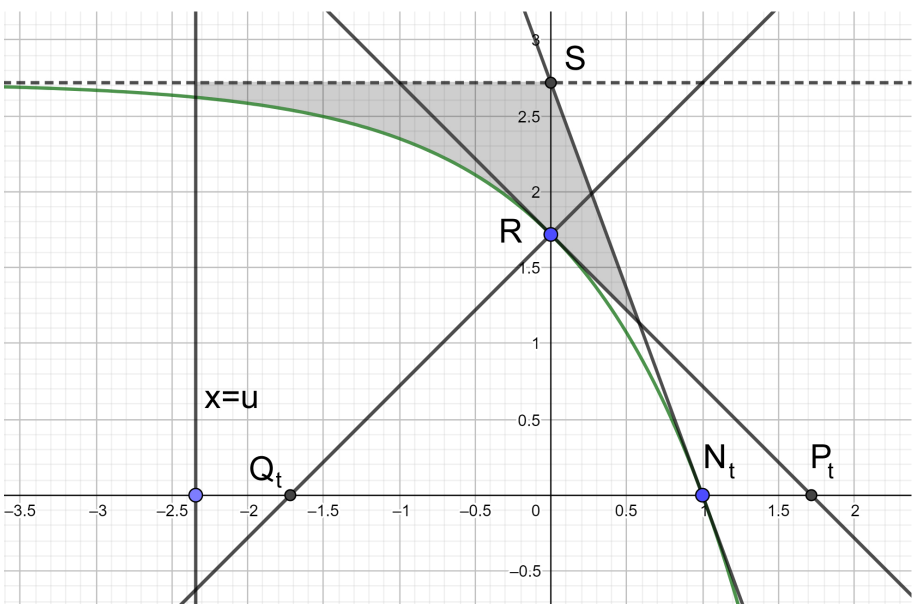
a) Ableitungen. Man findet $f_t'(x) = -te^{tx}$ und $f_t''(x) = -t^2e^{tx}$. Beachte, dass $f_t''(x) < 0$ ist für alle x.

Schnittpunkte mit den Achsen. Es ergibt sich $N_t(\frac{1}{t}|0)$ mit der Steigung $m_t = -te$, sowie $R(0|e-1)$ mit $f_t'(0) = -t$.

Asymptoten. Die Funktion $g(x) = e^{tx}$ besitzt die linksseitige Asymptote $y = 0$, folglich hat f die linksseitige Asymptote $y = e$.

b) Tangente g_t. Die Tangentengleichung ist $y = -etx + e$. Offenbar geht jede dieser Geraden durch $S(0|e)$. Die Steigung in diesem Punkt ist $g_t'(0) = -te$.

c) Längenabschnitt. Tangente h_t and K_t in R ist $h_t(x) = -tx + e - 1$. Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ist $P_t(\frac{e-1}{t}|0)$.



Normale n_t in R ist $n_t(x) = \frac{1}{t}x + e - 1$. Schnittpunkt mit der x-Achse ist $Q_t(t - te|0)$.

Länge von P_tQ_t ist $d = \overline{P_tQ_t}$ der Betrag der Differenz der x-Koordinaten von P_t und Q_t, also $d = |\frac{e-1}{t} - t + te|$. Wegen $te - t > 0$ ist der Ausdruck im Betrag positiv, folglich kann man die Betragsstriche weglassen: $d(t) = \frac{e-1}{t} - t + te$.

Bestimmung des Extremwerts. $d'(t) = -\frac{e-1}{t^2} - 1 + e = 0$ liefert $t^2 = 1$, wegen $t > 0$ also $t = 1$.

Wegen $d''(t) = \frac{2(e-1)}{t^3}$ ist $d''(1) = 2(e-1) > 0$, folglich liegt ein Minimum vor, und zwar ist $d(1) = 2(e-1)$.

d) Flächenberechnung. Die zu berechnenden Flächeninhalte sind

$$A_1 = \int_u^0 (e - (e - e^{tx}))\, dx = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \cdot e^{tu}, \quad \text{und}$$

$$A_2 = \int_0^{\frac{1}{t}} (-etx + e - (e - e^{tx}))\, dt = -\frac{e}{2t} + \frac{e}{t} - \frac{1}{t},$$

sodass sich insgesamt ergibt

$$A = A_1 + A_2 = \frac{e}{2t} - \frac{e^{tu}}{t}.$$

Für $u \to -\infty$ geht $e^{tu} \to 0$, also $A_t(u) \to \frac{e}{2t}$.