PROBLEM DER WOCHE 1

ABGABE AM MITTWOCH, 20.09.2017

1. *Gegeben ist ein Rechteck ABCD mit den Seitenlängen* $\overline{AB} = 6$ *und* $\overline{AD} = 4$.

Die vier Winkelhalbierenden des Rechtecks schneiden sich in den Punkten P, Q, R und S.

a) Fertige eine Zeichnung an.

b) Um was für ein Viereck handelt es sich bei PQRS? (Beweis!)

c) Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks PQRS.

Die Winkelhalbierenden bilden einen Winkel von 45° mit den Seiten; wählen wir das Koordinatensystem so, dass $A(0|0)$, $B(6,0)$ und $C(6,4)$ ist, dann lauten die Gleichungen der Winkelhalbierenden in A und in B beziehungsweise $y = x$ und $y = 6 - x$. Diese schneiden sich in $P(3|3)$.

Auf ähnliche Weise erhält man die andern Schnittpunkte $Q(4|2)$, $R(3|1)$ und $S(2,2)$. Da alle Seiten des Vierecks PQRS Länge $\sqrt{2}$ haben und benachbarte Winkelhalbierenden senkrecht aufeinander stehen, ist $PQRS$ ein Quadrat.

Sein Flächeninhalt ist offenbar $F = \sqrt{2}^2 = 2$.

2. *Man bestimme alle Paare positiver ganzer Zahlen a und b mit* $ab = 4a + 3b - 2$.

Es gilt

$$ab - 4a - 3b = -2. \tag{1}$$

Die linke Seite lässt sich nicht faktorisieren; wenn wir den Ansatz $ab - 4a - 3b = (a - *)(b - *)$ machen, dann muss der erste Stern eine 3, der zweite eine 4 sein, damit sich die Terme $-3b$ und $-4a$ ergeben. Wegen $(a-3)(b-4) = ab-4a-3b+12$ erhalten wir, wenn wir in (1) auf beiden Seiten 12 addieren,

$$(a - 3)(b - 4) = 10.$$

Weil a und b natürliche Zahlen sein sollen, gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:

(1) $a - 3 = 1$, $b - 4 = 10$, also $(a, b) = (4, 14)$;

(2) $a - 3 = 2$, $b - 4 = 5$, also $(a, b) = (5, 9)$;

(3) $a - 3 = 5$, $b - 4 = 2$, also $(a, b) = (8, 6)$;

(4) $a - 3 = 10$, $b - 4 = 1$, also $(a, b) = (13, 5)$.

Eine andere Möglichkeit besteht darin zu zeigen, dass a und b nicht zu groß werden können, etwa dass beide kleiner als 20 sind. Dann muss man nur noch alle Möglichkeiten durchprobieren oder von einem Computer durchprobieren lassen.

Auflösen der Gleichung nach a ergibt

$$a = \frac{3b-2}{b-4}.$$

Für große Werte von b geht dieser Ausdruck gegen 3. Ist $b > 4$, so ist $\frac{3b-2}{b-4} < 4$ gleichbedeutend mit $3b - 2 < 4b - 16$, also $b > 14$. Für solche Werte von b kommen also nur $a = 1, 2, 3$ in Frage. Diese probieren wir nacheinander durch.

(1) $a = 1$ ergibt $b = 4 + 3b - 2$, also $b = -1$: keine Lösung.

(2) $a = 2$ ergibt $2b = 8 + 3b - 2$, also $b = -6$: keine Lösung.

(3) $a = 3$ ergibt $3b = 12 + 3b - 2$: keine Lösung.

Also gibt es keine Lösungen mit $b > 14$. Die Möglichkeiten $b \leq 14$ kann man jetzt wieder durchprobieren und findet so alle Lösungen.