Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer
Die Lösungshinweise erheben nicht den Anspruch, die einzigen oder kürzesten Lösungswege aufzuzeigen.
Sie sollen unter anderem eine Orientierungshilfe bei der Auswahl der Aufgaben durch die Fachlehrerin oder den Fachlehrer sein. Maßgebend für die Korrektur ist allein der Aufgabentext und jede nach diesem Text mögliche Lösung.

Für jeden Arbeitsauftrag darf maximal die hier ausgewiesene Verrechnungspunktzahl vergeben werden; diese detaillierte Aufschlüsselung der vergebenen Verrechnungspunkte ist bis zum Abschluss des Verfahrens aufzubewahren.

In die Korrekturformblätter werden nur die erreichten Verrechnungspunktzahlen für die Teilaufgaben eingetragen, so wie sie auf den Aufgabenblättern ausgewiesen sind.

Erst die Endsumme aller erteilten Verrechnungspunkte (max. 60 VP) ist ggf. aufzurunden.

<u>Zum Pflichtteil:</u>

Aufgabe 1

$f'(x) = 3 \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ (2 VP)

Aufgabe 2

$F(x) = \ln(x+3) + \frac{4}{x}$ (1,5 VP)

Aufgabe 3

Es ist $g(3) = 0$, folglich $A = \int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 + 2 = \frac{10}{3}$. (2,5 VP)

Aufgabe 4

(1) Die Aussage ist wahr. Da im dargestellten Bereich $F'(x) = f(x) \geq 0$ ist, steigt F monoton. (1 VP)

(2) Die Aussage ist falsch. Es ist $\int_{-4}^{0} f'(x)\,dx = f(0) - f(-4) = 3 < 4$. (1 VP)

(3) Die Aussage ist wahr. Es ist $f'(f(-5)) = f'(1{,}5) > 0$, da der Graph von f hier monoton steigt. (1 VP)

(4) Die Aussage ist wahr. Die Steigung des Graphen von f nimmt links von $x = 0$ ab und rechts davon zu. Damit ist f' links von $x = 0$ streng monoton fallend und rechts davon streng monoton steigend. (1 VP)

Aufgabe 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & -11 & -7 \\ -3 & 2 & 14 & 11 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 9 & 12 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösungsmenge $L = \{(\frac{8}{3}t - 1;\ 4 - 3t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Interpretation: Die drei Gleichungen stellen drei Ebenen im Raum dar. Die Lösungsmenge beschreibt die Gerade, die in allen drei Ebenen liegt.

(3 VP)

Aufgabe 6

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$, also sind der Normalenvektor von E und der Richtungsvektor von g_a orthogonal zueinander und damit ist jede Gerade g_a parallel zu E. (0,5 VP)

b) $\frac{1}{5} \cdot \left| \left[\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 2 \Leftrightarrow |4a - 6| = 10$

Entweder $4a - 6 = 10$, also $a = 4$, oder $4a - 6 = -10$, also $a = -1$. (2 VP)

c) Ein Normalenvektor $\vec{n}$ einer solchen Ebene F ist orthogonal zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, also z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dies führt zu $F: x_1 = d$. Die Bedingung $\left| \frac{1-d}{1} \right| = 3$ liefert die Werte $d_1 = -2$ und $d_2 = 4$ und damit die beiden Ebenen $F_1: x_1 = -2$ und $F_2: x_1 = 4$. (2 VP)

Aufgabe 7

$P(A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$ (0,5 VP)

$P(B) = 6 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{20}$ (1 VP)

$P(C) = 3 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{40}$ (1 VP)

Zum Wahlteil:

Aufgabe A 1.1

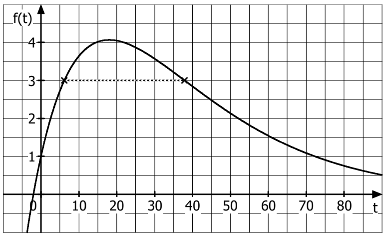
a) Maximale Zuflussrate (0,5 VP)

Die maximale Zuflussrate beträgt ca. 4,1 Liter pro Minute.

Zeitraum (1 VP)

$f(6) \approx f(38) \approx 3$, $38 - 6 = 32$.

Für ca. 32 Minuten beträgt die Zuflussrate mindestens 3 Liter pro Minute.

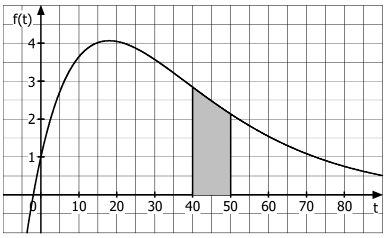


Stärkste Zunahme (0,5 VP)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ nimmt die Zuflussrate am stärksten zu.

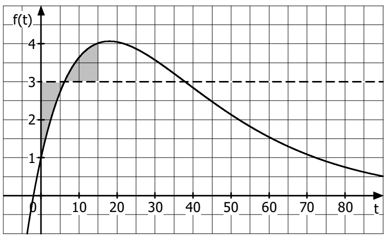
Wasservolumen (1,5 VP)

Der Flächeninhalt unterhalb des Graphen im Intervall [40; 50] beträgt ca. 10 Kästchen, die jeweils 2,5 Litern entsprechen.
Es fließen ca. 25 Liter Wasser zu.



mittlere Zuflussrate

Veranschaulichung: (1 VP)



$t_3 \approx 15$ (0,5 VP)

b) Ständige Zunahme (1 VP)

Es ist $e^{-0{,}05t} > 0$ und wegen $t \geq 0$ ist $t + 2 > 0$. Also ist $f(t) > 0$, die Zuflussrate ist folglich stets positiv. Somit nimmt das Wasservolumen im Teich ständig zu.

Wasservolumen (1,5 VP)

$$V = 600 + \int_0^{70} f(t)\,dt = 600 - 10 \cdot \left[(t + 22) \cdot e^{-0{,}05t}\right]_0^{70} \approx 792{,}22$$

Das Wasservolumen 70 Minuten nach Einsetzen des Regens beträgt ca. 792 Liter.

c) Nachweis (3 VP)

$f'(t) = 0{,}5 \cdot \left(e^{-0{,}05t} - 0{,}05(t+2) \cdot e^{-0{,}05t}\right) = 0{,}5 \cdot (0{,}9 - 0{,}05t) \cdot e^{-0{,}05t}$, $f'(70) \approx -0{,}039$,

$f(70) \approx 1{,}087$. Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(70 \mid 1{,}087)$:

$y = -0{,}039 \cdot (t - 70) + 1{,}087 = -0{,}039t + 3{,}817$.

Der Ansatz $-0{,}039t + 3{,}817 = 0$ führt auf $t_4 \approx 97{,}87$.

Nach ca. 98 Minuten fließt kein Wasser mehr zu.

Fassungsvermögen (1,5 VP)

Wasservolumen im Teich nach 70 Minuten: 792,22

Zufluss bis nach 97,87 Minuten: $\frac{1}{2} \cdot (97{,}87 - 70) \cdot f(70) \approx 15{,}15$, $792{,}22 + 15{,}15 = 807{,}37$

Der Teich müsste mindestens ca. 807,37 Liter fassen.

Aufgabe A 1.2

a) Flächeninhalt (2 VP)

$$A = -\int_{-1}^{0} f_{-0,8}(x)\,dx + \int_{0}^{1,25} f_{-0,8}(x)\,dx = -\left[-\frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1,25}$$

$$= \frac{7}{30} + \frac{325}{768} \approx 0{,}657$$

Interpretation (1 VP)

Die Tangenten an den Graphen von $f_{-0,8}$ in den Punkten $P(0 \mid 0)$ und $Q(1 \mid f_{-0,8}(1))$ sind orthogonal zueinander.

b) Interpretation (1 VP)

Von der Fläche zwischen dem Graphen von f_a und der x-Achse über dem Intervall $[-1;\,0]$ sind die Anteile oberhalb und unterhalb der x-Achse gleich groß.

Wert von a (2 VP)

$\int_{-1}^{0} f_a(x)\,dx = \left[\frac{a}{4}x^4 + \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = \frac{a}{12} - \frac{1}{6}$. Der Ansatz $\frac{a}{12} - \frac{1}{6} = 0$ führt auf $a = 2$.

c) Stellen (2 VP)

$f_a'(x) = 3ax^2 + 2(a+1)x + 1$. Der Ansatz $f_1'(x) = f_2'(x)$ führt auf die Gleichung

$3x^2 + 2x = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Aufgabe A 2.1

a) Maximale Schadstoffmenge (0,5 VP)

Die maximale Schadstoffmenge beträgt ca. 9,2 mg.

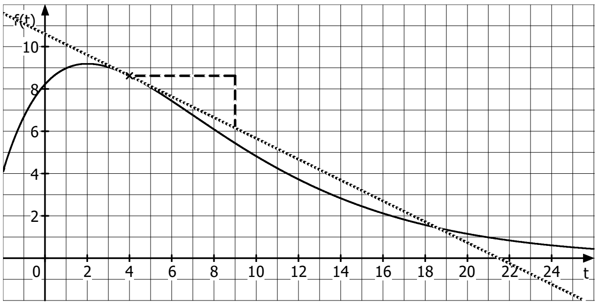
Zeitpunkt (0,5 VP)

Ab dem Zeitpunkt $t \approx 16,4$ beträgt die Schadstoffmenge weniger als 2 mg.

Momentane Änderungsrate (1,5 VP)

$$f'(4) \approx -\frac{2,5}{5} = -0,5$$

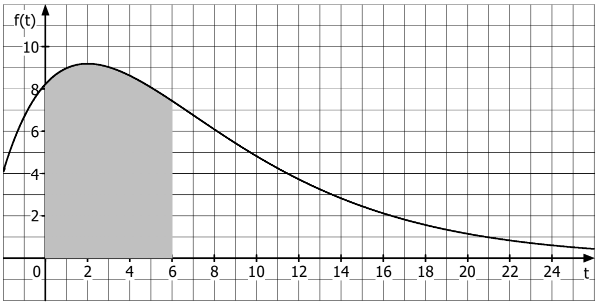
Die momentane Änderungsrate nach vier Stunden beträgt ca. $-0,5$ mg pro Stunde.



Mittlere Schadstoffmenge (1,5 VP)

Der Flächeninhalt unterhalb des Graphen im Intervall [0; 6] beträgt ca. 52 Kästchen, dies entspricht 52 mg, $\frac{52}{6} \approx 8,7$.

Die mittlere Schadstoffmenge beträgt ca. 8,7 mg.



b) Ständige Abnahme (1 VP)

Es ist $e^{-0,1t-2,4} > 0$, also gilt für die momentane Änderungsrate g, dass $g(t) < 0$ ist.

Damit nimmt die Schadstoffmenge ständig ab.

Zeitpunkt (1,5 VP)

Der Ansatz $g(t) = -0,5$ führt auf die Gleichung $e^{-0,1t-2,4} = \frac{1}{18}$ mit der Lösung

$$t_1 = -10 \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{18}\right) + 2,4 \right) \approx 4,90$$

Zum Zeitpunkt $t_1 \approx 4,90$ beträgt die momentane Änderungsrate $-0,5$ mg pro Stunde.

c) Funktionsterm (2 VP)

$$G(t) = 10 + \int_0^t g(x)\,dx = 10 + \left[90 \cdot e^{-0,1x-2,4} \right]_0^t = 90 \cdot e^{-0,1t-2,4} + 1,835$$

Schadstoffmenge unter 1 mg (1 VP)

Für $t \to \infty$ gilt $e^{-0,1t-2,4} \to 0$ und damit $G(t) \to 1,835$.

Die Schadstoffmenge sinkt nicht unter 1 mg.

d) Gleichung (1,5 VP)

$G(t+3) = 0,8 \cdot G(t)$

Aufgabe A 2.2

a) Begründung (2,5 VP)

Der Graph in Abb. 1 gehört nicht zu einer Funktion f_t. Denn sonst wäre $f_t(0) = t = 2$ und folglich hätte der Graph die Periode π. Der Graph in Abb. 1 hat jedoch eine größere Periode.

Der Graph in Abb. 3 gehört nicht zu einer Funktion f_t, denn dieser geht durch den Ursprung, aber $f_t(0) = t > 0$.

Wert von t (0,5 VP)

$t = 2$

b) Begründung (1,5 VP)

Für alle $t > 0$ gilt $\sin(t \cdot x) \geq -1$, also ist $t \cdot \sin(t \cdot x) \geq -t$ und damit $f_t(x) = t \cdot \sin(t \cdot x) + t \geq 0$.

c) Funktionsterm (2 VP)

Spiegelung an der Geraden $y = 2$ ergibt $h(x) = -2 \cdot \sin(2x) + 2$, Verschiebung um 4 in positive x-Richtung ergibt $g(x) = -2 \cdot \sin(2(x-4)) + 2$.

d) Wert von t (2,5 VP)

$f_t'(x) = t^2 \cdot \cos(t \cdot x)$, also ist $f_t'(0) = t^2$ und die Steigung der Normalen beträgt $-\frac{1}{t^2}$.

Mit $H\left(-\frac{3\pi}{2t}\middle|2t\right)$ und $T\left(\frac{3\pi}{2t}\middle|0\right)$ ergibt sich die Bedingung $-\frac{1}{t^2} = -\frac{t}{\frac{3\pi}{2t}}$. Diese führt auf

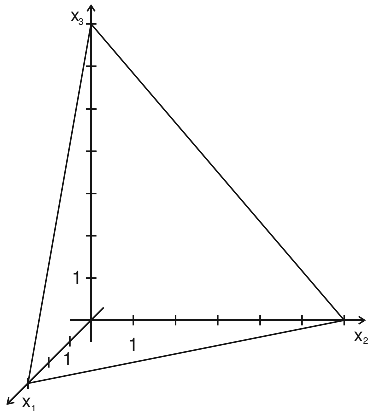
$t = \sqrt[4]{\frac{3}{2}\pi} \approx 1,47$.

Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer

Aufgabe B 1

a) Darstellung im Koordinatensystem (1 VP)

siehe rechts



Koordinatengleichung (1,5 VP)

$E_7: \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{7}x_3 = 1$

Winkel (1,5 VP)

$$\sin\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{7}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{7}\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{\sqrt{281}}{42}}, \qquad \alpha \approx 21{,}0°$$

b) Werte von a (1,5 VP)

$V_a = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot |a| = 3 \cdot |a|$

Mit $V_a = 36$ ergeben sich die Lösungen $a_1 = 12$ und $a_2 = -12$.

c) Punkte auf g (2 VP)

Der Ansatz $d = \frac{|6 \cdot (1{,}5 + 15t) + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4t - 18|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}}$ führt mit $d = 7$ zur Gleichung

$|98t| = 49$ mit den Lösungen $t_1 = \frac{1}{2}$ und $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Damit erhält man die Punkte $A(9\,|\,3\,|\,2)$ und $B(-6\,|\,3\,|\,-2)$.

d) Wert von a (2,5 VP)

Aus den Spannvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\0\\a\end{pmatrix}$ ergibt sich $\vec{n} = \begin{pmatrix}2a\\a\\6\end{pmatrix}$ als ein Normalenvektor der Ebene E_a. Für den Winkel β, den E_a mit der x_1x_2-Ebene einschließt, gilt $\cos\beta = \frac{\left|\begin{pmatrix}2a\\a\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2a\\a\\6\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{6}{\sqrt{5a^2 + 36}}$. Einsetzen von $\beta = 60°$ führt auf die Gleichung $\frac{1}{2} = \frac{6}{\sqrt{5a^2 + 36}}$. Eine Lösung dieser Gleichung ist $a = \frac{6}{5}\sqrt{15} \approx 4{,}65$.

Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer

Aufgabe B 2

a) Koordinatengleichung (2 VP)

Spannvektoren von E sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, somit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E. Mit $C \in E$ ergibt sich $E: 3x_2 + 4x_3 = 27$.

Sicherheitsbestimmung (1,5 VP)

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{4}{5}, \quad \alpha \approx 36{,}9°$$

Das Spielgerät erfüllt die Sicherheitsbestimmung.

Länge (1,5 VP)

Der Mast durchdringt die Kletterfläche im Punkt $R(2{,}5 \mid 6 \mid c)$. Punktprobe R mit E ergibt $c = 2{,}25$. Daraus ergibt sich für die gesuchte Länge $5\,\text{m} - 2{,}25\,\text{m} = 2{,}75\,\text{m}$.

b) Länge des Seils (1,5 VP)

Beschreibt S die Spitze der Stange, so ist das Dreieck SQC rechtwinklig, und für die Seillänge d gilt: $d = \sqrt{|\overrightarrow{CQ}|^2 + 1{,}25^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2 + 1{,}25^2} = 5{,}25$.

Das Seil ist 5,25 m lang.

c) Verfahren (1,5 VP)

Man bestimmt den Lotfußpunkt L von P auf der Geraden durch A und B.

Damit ergibt sich: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OL} + |\overrightarrow{PL}| \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) Durchmesser des Balls (2 VP)

Ist r der Radius des Balls, so wird der Mittelpunkt des Balls durch den Punkt $M(2 \mid 5 \mid r)$ beschrieben. Da der Ball die Kletterfläche berührt, gilt $d(M,E) = \frac{|3 \cdot 5 + 4r - 27|}{5} = r$ und somit $r = \frac{4}{3}$.

Der Ball hat einen Durchmesser von ca. 2,67 m.

Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer

Aufgabe C 1

a) X: Anzahl der Drehungen, bei denen „schwarz“ erscheint. X ist $B_{40;0,6}$-verteilt.

Ereignis A (1 VP)

$P(A) = P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx 0{,}926$

Ereignis B (2 VP)

$E(X) = 40 \cdot 0{,}6 = 24$

$P(B) = P(0{,}8 \cdot 24 \leq X \leq 1{,}2 \cdot 24) = P(19{,}2 \leq X \leq 28{,}8) = P(20 \leq X \leq 28)$

$= P(X \leq 28) - P(X \leq 19) \approx 0{,}855$

b) Höhe des Einsatzes (2 VP)

Y: Auszahlung in Euro

k	5	15	0
$P(Y = k)$	$3 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}288$	$0{,}4^3 = 0{,}064$	irrelevant

$E(Y) = 0{,}288 \cdot 5 + 0{,}064 \cdot 15 = 2{,}4$

Das Spiel ist fair, wenn der Einsatz dem Erwartungswert der Auszahlung entspricht. Das Spiel ist somit bei einem Einsatz von 2,40 Euro fair.

c) Mindestanzahl der Drehungen (2 VP)

Z: Anzahl der Drehungen, bei denen „gelb“ erscheint. Z ist binomialverteilt mit $p = 0{,}4$ und unbekanntem Parameter n. Gesucht ist die kleinste Zahl n mit $P(Z \geq 40) \geq 0{,}95$, also $P(Z \leq 39) \leq 0{,}05$.

Für $n = 120$ ist $P(Z \leq 39) \approx 0{,}055$, für $n = 121$ ist $P(Z \leq 39) \approx 0{,}048$.

Man muss das Glücksrad mindestens 121-mal drehen.

d) Werte von k (3 VP)

$$P(\text{"zwei gleiche Farben"}) = \frac{k}{12} \cdot \frac{12-k}{12} + \frac{12-k}{12} \cdot \frac{k}{12} = \frac{12k - k^2}{72}$$

Gesucht sind die ganzzahligen Werte $1 \leq k \leq 11$, welche die Ungleichung $\frac{12k - k^2}{72} < 0{,}4$ erfüllen. Diese sind 1, 2, 3, 9, 10 und 11.

Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer

Aufgabe C 2

a) Ereignis A (0,5 VP)

X_1: Anzahl der Gäste, die Menü M1 bestellen. X_1 ist $B_{120;0,15}$-verteilt.

$P(A) = P(X_1 = 20) \approx 0,086$

Ereignis B (1 VP)

X_2: Anzahl der Gäste, die ein vegetarisches Menü bestellen. X_2 ist $B_{120;0,25}$-verteilt.

$P(B) = P(25 < X_2 < 40) = P(X_2 \leq 39) - P(X_2 \leq 25) \approx 0,803$

Ereignis C (1,5 VP)

X_3: Anzahl der Gäste unter den letzten 110, die ein vegetarisches Menü bestellen.

X_3 ist $B_{110;0,25}$-verteilt.

$P(C) = 0,75^{10} \cdot P(X_3 = 25) \approx 0,004$

b) Experiment und Ereignis (1,5 VP)

Experiment: Man wählt zufällig zehn Gäste aus.

Ereignis: Von diesen haben höchstens acht ein fleischhaltiges Menü bestellt.

c) Maximale Anzahl der Gäste (2 VP)

Y: Anzahl der Gäste, die Menü M1 bestellen. Y ist binomialverteilt mit $p = 0,15$ und unbekanntem Parameter n. Gesucht ist die größte natürliche Zahl n mit $P(Y \leq 50) \geq 0,95$.

Für $n = 270$ ist $P(Y \leq 50) \approx 0,953$, für $n = 271$ ist $P(Y \leq 50) \approx 0,94993$.

Es dürfen höchstens 270 Gäste im Restaurant essen.

d) Entscheidungsregel (2,5 VP)

Z: Anzahl der Gäste, die nicht mehr kommen werden

$H_0: p \geq 0,1$

Trifft H_0 zu, so ist Z im Extremfall binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0,1$.

Gesucht ist die größte natürliche Zahl k mit $P(Z \leq k) \leq 0,05$.

Es ist $P(Z \leq 12) \approx 0,032$ und $P(Z \leq 13) \approx 0,057$.

Entscheidungsregel:

Äußern höchstens zwölf Gäste, dass sie wegen des Lärms nicht mehr kommen werden, so wird die Nullhypothese abgelehnt. Ansonsten kann sie nicht abgelehnt werden.

Erläuterung (1 VP)

Der Test begrenzt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Fehlers erster Art.

Dieser Fehler besteht darin, die Nullhypothese abzulehnen, obwohl sie zutrifft.

Das entspricht Überlegung II.