Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Abiturprüfung an den allgemein bildenden Gymnasien

Nachtermin: **2020**

Prüfungsfach: **Mathematik**

Bearbeitungszeit: 270 Minuten

Hilfsmittel:

- Die „Merkhilfe“
- Der im Kurs eingeführte wissenschaftliche Taschenrechner
- Nachschlagewerke zur deutschen Rechtschreibung

Hinweise:

Sie erhalten **vier** Aufgaben:

1. Die Aufgaben des Pflichtteils
2. Eine Wahlteil-Aufgabe Analysis (A 1 oder A 2)
3. Eine Wahlteil-Aufgabe Analytische Geometrie (B 1 oder B 2)
4. Eine Wahlteil-Aufgabe Stochastik (C 1 oder C 2)

Es sind **alle vier** vorgelegten Aufgaben zu bearbeiten.

Im **ersten Teil** der Prüfungszeit bearbeiten Sie die Aufgaben des Pflichtteils **ohne Hilfsmittel**.

Nach Abgabe der bearbeiteten Aufgaben des Pflichtteils erhalten Sie die **zugelassenen Hilfsmittel** für die Bearbeitung der **drei** Wahlteil-Aufgaben.

Verwenden Sie für die Reinschrift und den Entwurf je Aufgabe einen neuen Bogen

Sie sind verpflichtet, die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn auf Anzahl der Blätter, Anlagen usw. zu überprüfen.

Vermerken Sie auf der Reinschrift, welche Aufgabe Sie bearbeitet haben.

Lösungen auf den Aufgabenblättern werden **nicht** gewertet; ausgenommen sind Eintragungen in Abbildungen, die auf entsprechend gekennzeichneten Anlagen vorzunehmen sind.

Abiturprüfung an den allgemein bildenden Gymnasien

Prüfungsfach: Mathematik

Nachtermin 2020 **Pflichtteil** **Blatt 1 von 2**

Aufgabe 1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 3x \cdot \sqrt{1+x^2}$.

(2 VP)

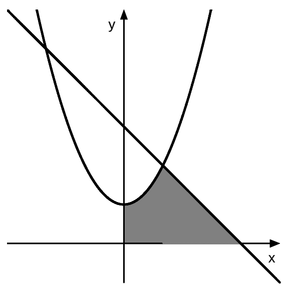
Aufgabe 2

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{4}{x^2}$ $(x > 0)$.

(1,5 VP)

Aufgabe 3

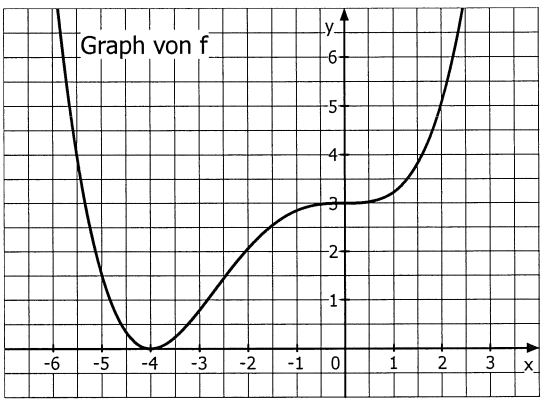
Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = x^2 + 1$ und g mit $g(x) = 3 - x$, die den Punkt $S(1|2)$ gemeinsam haben.
Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



(2,5 VP)

Aufgabe 4

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
F ist eine Stammfunktion von f.
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.



(1) Die Funktion F steigt im dargestellten Bereich monoton.

(2) $\int_{-4}^{0} f'(x)\,dx > 4$

(3) $f'(f(-5)) > 0$

(4) Der Graph von f' hat an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt.

(4 VP)

Aufgabe 5

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - 11x_3 &= -7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 14x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

(3 VP)

Aufgabe 6

Gegeben sind die Ebene $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ und für jede reelle Zahl a eine Gerade

$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass jede Gerade g_a parallel zu E ist.

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die g_a und E den Abstand 2 haben.

c) Es gibt Ebenen, die orthogonal zu E sind und zu g_4 den Abstand 3 haben. Bestimmen Sie zu jeder solchen Ebene eine Gleichung.

(4,5 VP)

Aufgabe 7

In einer Tüte sind sechs rote, drei weiße und ein gelbes Gummibärchen. Man nimmt sich drei Gummibärchen aus der Tüte und isst sie sofort.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Es wird kein rotes Gummibärchen gezogen.

B: Unter den gezogenen Gummibärchen kommt jede Farbe einmal vor.

C: Unter den gezogenen Gummibärchen sind mehr gelbe als rote.

(2,5 VP)

Aufgabe A 1.1

Während eines Regens füllt sich ein kleiner Gartenteich. Zu Beginn des Regens sind 600 Liter Wasser im Teich. Die Funktion f beschreibt für $0 \le t \le 90$ die Zuflussrate des Wassers (t in Minuten seit Beginn des Regens, f(t) in Litern pro Minute). Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen der Funktion f.

a) Bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenstellungen anhand des Graphen in der Anlage.
Geben Sie die maximale Zuflussrate an.
Bestimmen Sie die Länge des Zeitraums, in dem die Zuflussrate mindestens 3 Liter pro Minute beträgt.
Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem die Zuflussrate am stärksten zunimmt.
Ermitteln Sie das Volumen des Wassers, das zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 40$ und $t_2 = 50$ zufließt.

Für einen Zeitpunkt t_3 beträgt im Intervall $[0; t_3]$ die mittlere Zuflussrate 3 Liter pro Minute. Veranschaulichen Sie den Sachverhalt in der Abbildung und geben Sie einen passenden Wert von t_3 an.

(5 VP)

Die Funktion f ist gegeben durch $f(t) = 0{,}5 \cdot (t+2) \cdot e^{-0{,}05t}$.
Die Funktion F mit $F(t) = -10 \cdot (t+22) \cdot e^{-0{,}05t}$ ist eine Stammfunktion von f.

b) Begründen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass das Wasservolumen im Teich in den ersten 90 Minuten nach Regenbeginn ständig zunimmt.
Berechnen Sie das Wasservolumen im Teich 70 Minuten nach Einsetzen des Regens.
(Teilergebnis: ca. 792 Liter) (2,5 VP)

c) In einer neuen Modellierung wird nun die Zuflussrate nur bis zum Ende der 70. Minute durch die Funktion f modelliert. Danach wird sie durch die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $t = 70$ beschrieben.
Weisen Sie nach, dass gemäß dieser Modellierung etwa 98 Minuten nach Regenbeginn kein weiteres Wasser mehr zufließt.
Bestimmen Sie, wie groß das Fassungsvermögen des Teichs nach diesem Modell mindestens sein muss, damit er nicht überläuft.

(4,5 VP)

Aufgabe A 1.2

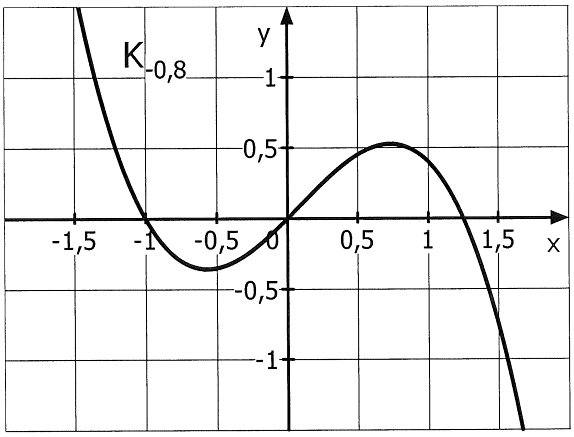
Für jedes $a \neq 0$ ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades f_a gegeben durch

$$f_a(x) = ax^3 + (a+1)x^2 + x.$$

Der Graph von f_a ist K_a.

a) Die Abbildung zeigt den Graphen $K_{-0,8}$, der die x-Achse an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 1{,}25$ schneidet.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von $K_{-0,8}$ und der x-Achse eingeschlossen wird.



Es gilt $f'_{-0,8}(0) \cdot f'_{-0,8}(1) = -1$.

Interpretieren Sie diesen Zusammenhang geometrisch.

(3 VP)

b) Für einen Wert von a gilt $\int_{-1}^{0} f_a(x)\,dx = 0$.

Interpretieren Sie diese Gleichung geometrisch.

Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a.

(3 VP)

c) Es gibt zwei Stellen, an denen die Steigung von K_a unabhängig von a ist.

Berechnen Sie diese beiden Stellen.

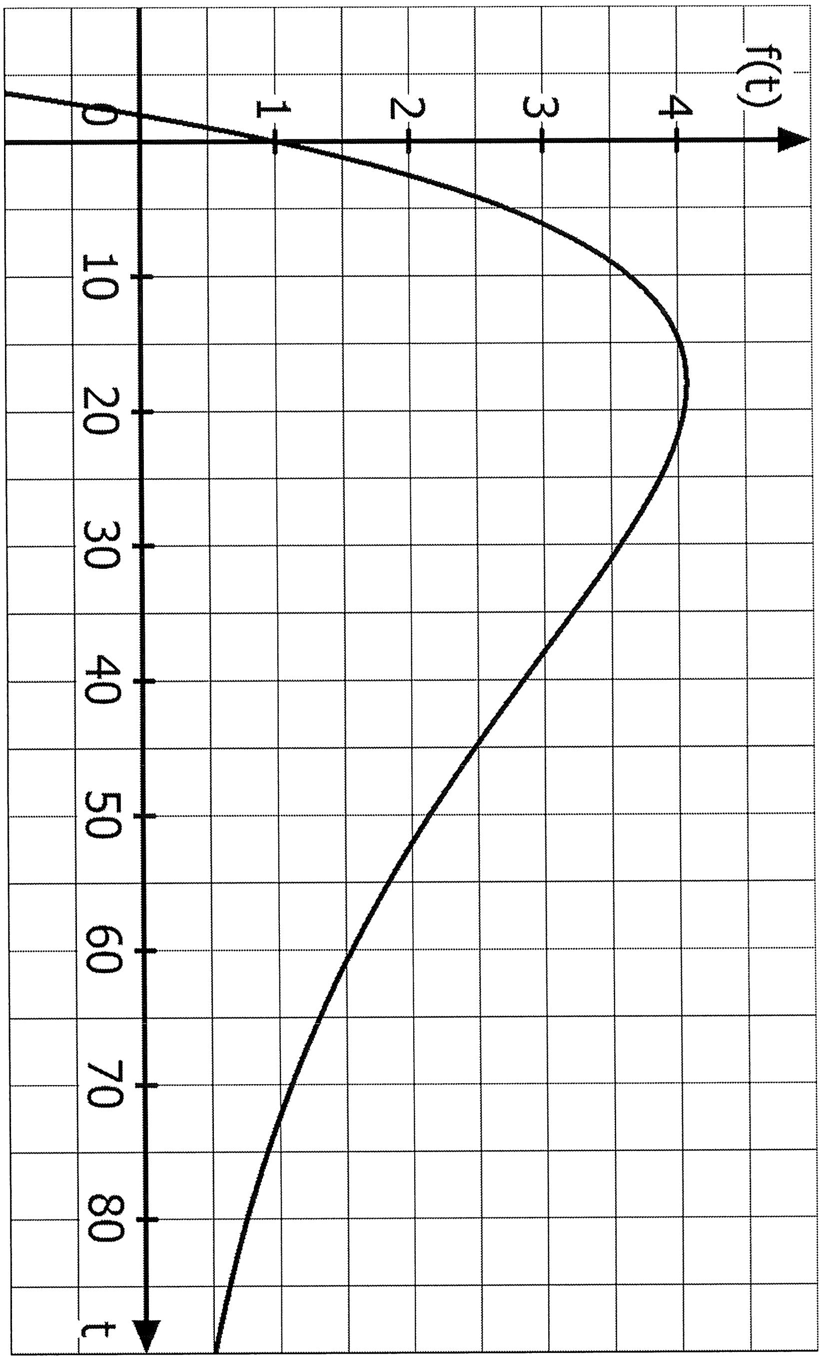
(2 VP)

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Prüfungsfach: Mathematik

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Abbildung zu Aufgabe A 1.1



Aufgabe A 2.1

Ein mit Schadstoffen verunreinigter Erdboden soll entgiftet werden. Die Funktion f beschreibt für $t \geq 0$ die Schadstoffmenge in einem Liter Erde (t in Stunden nach Behandlungsbeginn, f(t) in mg). Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen der Funktion f.

a) Bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenstellungen anhand des Graphen in der Anlage.
Geben Sie die maximale Schadstoffmenge an.
Geben Sie den Zeitpunkt an, ab dem die Schadstoffmenge im abgebildeten Bereich weniger als 2 mg beträgt.
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Schadstoffmenge vier Stunden nach Behandlungsbeginn.
Ermitteln Sie die mittlere Schadstoffmenge in den ersten sechs Stunden.

(4 VP)

Ein neuer Wirkstoff wird hinsichtlich seiner Eignung zur Entgiftung von schadstoffbelasteter Erde überprüft. Die dazu verwendete Probe enthält zu Beginn 10 mg Schadstoffe. Die Funktion g mit $g(t) = -9 \cdot e^{-0{,}1t} - 2{,}4$ beschreibt für $t \geq 0$ die Änderungsrate der Schadstoffmenge in der Probe (t in Stunden nach Behandlungsbeginn, $g(t)$ in mg pro Stunde).

b) Weisen Sie nach, dass die Schadstoffmenge in der Probe ständig abnimmt.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate der Schadstoffmenge in der Probe $-0{,}5$ mg pro Stunde beträgt.

(2,5 VP)

c) Ermitteln Sie einen integralfreien Term der Funktion, welche die verbleibende Schadstoffmenge in der Probe zum Zeitpunkt t darstellt.
Untersuchen Sie, ob die Schadstoffmenge langfristig unter 1 mg sinkt.

(3 VP)

d) Es gibt einen Drei-Stunden-Zeitraum, in dem die Schadstoffmenge in der Probe um 20 % abnimmt. Geben Sie eine Gleichung an, deren Lösung den Beginn dieses Zeitraums darstellt.

(1,5 VP)

Aufgabe A 2.2

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = t \cdot \sin(t \cdot x) + t$.

a) Abgebildet sind drei Graphen.
Begründen Sie, dass zwei dieser Graphen nicht zu einer Funktion f_t gehören.
Der verbleibende Graph gehört zu einer Funktion f_t. Geben Sie den zugehörigen Wert von t an.

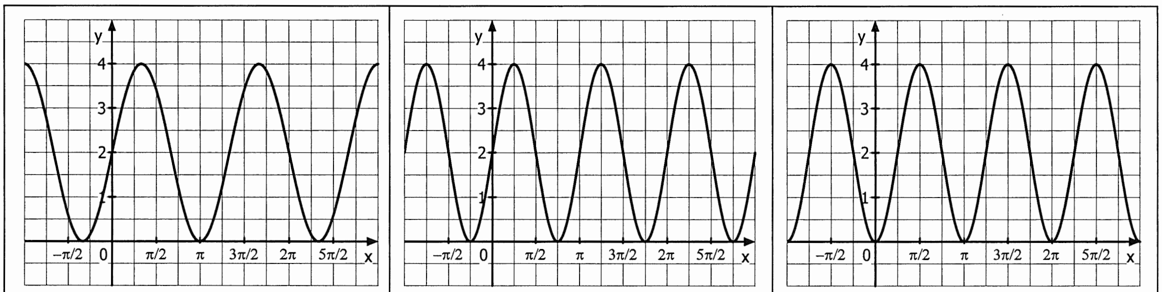


Abb. 1 Abb. 2 Abb. 3

(3 VP)

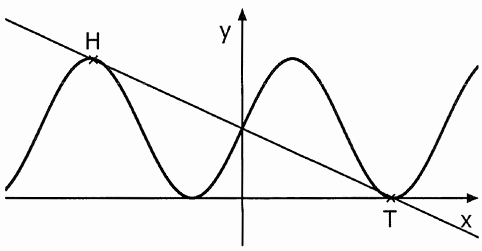
b) Begründen Sie, dass die Funktion f_t für keinen Wert von t negative Funktionswerte annimmt.

(1,5 VP)

c) Der Graph der Funktion g entsteht aus dem Graphen von f_2 durch Spiegelung an der Geraden $y = 2$ und anschließender Verschiebung um 4 in positive x-Richtung.
Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm für g.

(2 VP)

d) Die nebenstehende Abbildung zeigt für einen bestimmten Wert von t den Graphen von f_t und die Normale im Wendepunkt auf der y-Achse.
Diese schneidet den Graphen von f_t in den Extrempunkten H und T.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert von t.



(2,5 VP)

Nachtermin 2020

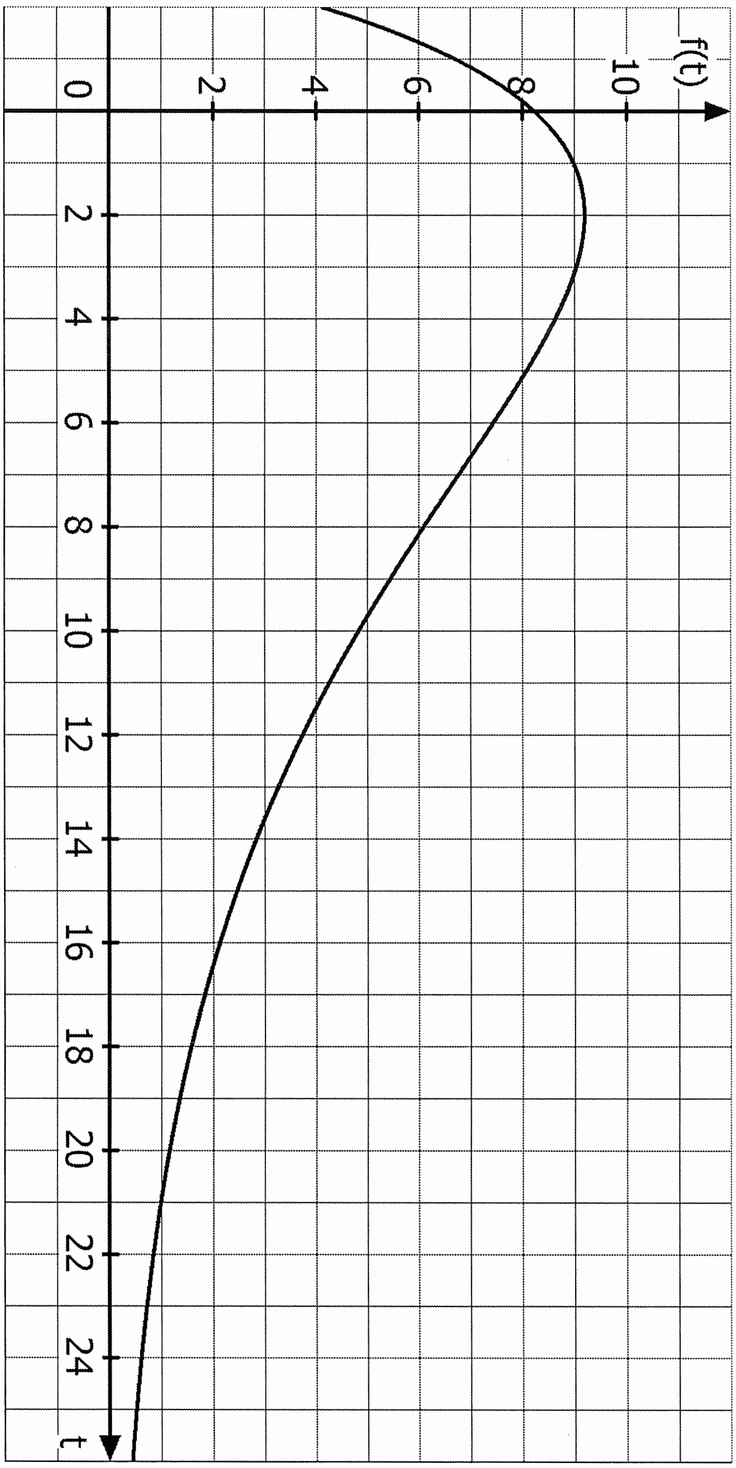
Zu- und Vorname: ______________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Prüfungsfach: Mathematik

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Abbildung zu Aufgabe A 2.1



Für jede Zahl $a \neq 0$ wird durch die drei Punkte $P(3|0|0)$, $Q(0|6|0)$ und $R_a(0|0|a)$ eine Ebene E_a festgelegt.

a) Stellen Sie die Ebene E_7 in einem geeigneten Koordinatensystem dar.
Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_7 an.
Berechnen Sie die Weite des Winkels, den E_7 mit der x_3-Achse einschließt.

(4 VP)

b) Ermitteln Sie diejenigen Werte von a, für die die Ebenen E_a mit den Koordinatenebenen jeweils eine Pyramide mit dem Rauminhalt 36 Volumeneinheiten einschließen.

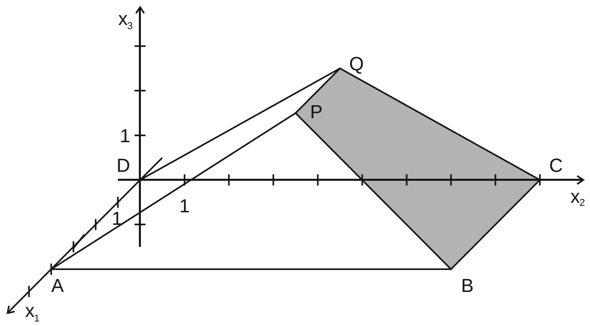
(1,5 VP)

c) Die Ebene E_9 ist gegeben durch $E_9: 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 18$.
Bestimmen Sie die Koordinaten derjenigen Punkte der Geraden
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, die von E_9 den Abstand 7 Längeneinheiten haben.

(2 VP)

d) Ermitteln Sie einen Wert von a, für den die Ebene E_a mit der x_1x_2-Ebene einen Winkel der Größe 60° einschließt.

(2,5 VP)



Die Punkte $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(4\,|\,9\,|\,0)$, $C(0\,|\,9\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,0)$, $P(3\,|\,5\,|\,3)$ und $Q(1\,|\,5\,|\,3)$ beschreiben in einem Koordinatensystem die Eckpunkte eines Spielgeräts, dessen dreieckige Seitenflächen offen sind. Das Viereck BCQP beschreibt die Kletterfläche des Spielgeräts; ihre Dicke kann vernachlässigt werden. Die x_1x_2-Ebene beschreibt die Bodenfläche (alle Koordinatenangaben in Meter).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, die das Viereck BCQP enthält.
Aus Sicherheitsgründen darf der Neigungswinkel zwischen der Kletterfläche und der Bodenfläche nicht größer als 40° sein.
Überprüfen Sie, ob das Spielgerät diese Sicherheitsbestimmung erfüllt.
Senkrecht zum Boden ist ein 5 m langer Fahnenmast angebracht. Dieser durchdringt die Kletterfläche und ragt über das Spielgerät hinaus. Im Modell wird das untere Ende des Masts durch den Punkt $U(2{,}5\,|\,6\,|\,0)$ beschrieben.
Berechnen Sie die Länge des Teils des Masts, der über das Spielgerät hinausragt.
(Teilergebnis: $E: 3x_2 + 4x_3 = 27$) (5 VP)

b) In der Ecke des Spielgeräts, die im Modell durch den Punkt Q beschrieben wird, ist orthogonal zur Kletterfläche eine 1,25 m lange Stange befestigt. Von ihrer Spitze wird ein Seil als Kletterhilfe straff gespannt. Der Endpunkt des Seils entspricht im Modell dem Punkt C.
Bestimmen Sie die Länge dieses Seils. (1,5 VP)

c) Für Wartungsarbeiten wird der Fahnenmast entfernt und das Spielgerät auf die Seite gekippt. Dies entspricht im Modell einer Drehung um die Achse AB.
Der Punkt P wird dabei auf einen Punkt P‘ in der x_1x_2-Ebene abgebildet.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem die Koordinaten von P‘ bestimmt werden können. (1,5 VP)

d) Das Spielgerät wird ohne Fahnenmast wieder aufgestellt. Ein großer Ball wird so in das Spielgerät gelegt, dass er den Boden an der Stelle berührt, die im Modell durch den Punkt $F(2\,|\,5\,|\,0)$ beschrieben wird. Der Ball ist genau so groß, dass er die Kletterfläche von unten berührt.
Berechnen Sie den Durchmesser des Balls. (2 VP)

Ein Glücksrad besitzt zehn gleich große Sektoren, von denen vier gelb und sechs schwarz gefärbt sind.

a) Das Glücksrad wird 40-mal gedreht.
Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: Es erscheint mindestens 20-mal „schwarz“.
B: Die Anzahl der Drehungen mit dem Ergebnis „schwarz“ weicht um höchstens 20 % vom Erwartungswert dieser Anzahl ab.

(3 VP)

b) Bei einem Spiel dreht ein Spieler das Glücksrad dreimal.
Erhält er genau zweimal „gelb“, dann werden ihm 5 Euro ausbezahlt.
Erhält er dreimal „gelb“, dann werden ihm 15 Euro ausbezahlt.
Ansonsten wird ihm nichts ausbezahlt.
Untersuchen Sie, bei welchem Einsatz dieses Spiel fair ist.

(2 VP)

c) Ermitteln Sie, wie oft man das Glücksrad mindestens drehen muss, damit die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens 40-mal „gelb“ erhält, mindestens 95 % beträgt.

(2 VP)

d) Es werden zwei neue Glücksräder mit jeweils zwölf gleich großen Sektoren mit den Farben rot und blau wie folgt gefärbt:
Das erste Glücksrad hat genau k rote Sektoren, das zweite Glücksrad hat genau k blaue Sektoren. Dabei wird keines der beiden Glücksräder mit nur einer Farbe gefärbt. Beide Glücksräder werden je einmal gedreht.
Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei gleiche Farben zu erhalten, kleiner als 40 % ist.

(3 VP)

Ein Restaurant bietet seinen Gästen verschiedene Menüs an. Neben fleischhaltigen Menüs gibt es zwei vegetarische Menüs M1 und M2. Im Durchschnitt entscheiden sich 15 % aller Gäste für das Menü M1 und 10 % aller Gäste für das Menü M2. Vereinfachend geht man davon aus, dass die Bestellungen unabhängig voneinander sind.

a) An einem Tag kommen 120 Gäste, von denen jeder ein Menü bestellt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Genau 20 Gäste entscheiden sich für das Menü M1.
B: Mehr als 25 und weniger als 40 Gäste wählen ein vegetarisches Menü.
C: Die ersten 10 Gäste bestellen ein fleischhaltiges Menü und insgesamt werden an diesem Tag 25 vegetarische Menüs bestellt.

(3 VP)

b) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment und ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem folgenden Term berechnen lässt:

$$1-0{,}75^{10}-10\cdot 0{,}75^{9}\cdot 0{,}25$$

(1,5 VP)

c) Das Restaurant hat Zutaten für die Zubereitung von genau 50 Menüs M1 gelagert. Bestimmen Sie, wie viele Gäste höchstens im Restaurant essen dürfen, damit die Vorräte für das Menü M1 mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % ausreichen. (2 VP)

d) Neben dem Restaurant soll in einiger Zeit eine Baustelle eingerichtet werden. Es wird befürchtet, dass aufgrund des Lärms weniger Gäste kommen werden. Deshalb soll die Nullhypothese H_0: „Mindestens 10 % der Gäste werden aufgrund des zu erwartenden Lärms nicht mehr ins Restaurant kommen.“ auf Basis einer Umfrage unter 200 Gästen auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Vor der Konzeption des Tests zog die Restaurantleitung in Erwägung einen Lärmschutz errichten zu lassen und stellte folgende Überlegungen an:

I: Wenn der Lärmschutz errichtet wird, obwohl der Lärm weniger als 10 % der Gäste stört, entstehen unnötige Ausgaben.

II: Wenn der Lärmschutz nicht errichtet wird, obwohl der Lärm mindestens 10 % der Gäste stört, entgehen dem Restaurant Einnahmen.

Erläutern Sie, für welchen dieser beiden Fälle die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens mit obigem Test auf 5 % begrenzt werden kann.

(3,5 VP)

