Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer
Die Lösungshinweise erheben nicht den Anspruch, die einzigen oder kürzesten Lösungswege aufzuzeigen. Sie sollen unter anderem eine Orientierungshilfe bei der Auswahl der Aufgaben durch die Fachlehrerin oder den Fachlehrer sein. Maßgebend für die Korrektur ist allein der Aufgabentext und jede nach diesem Text mögliche Lösung.

Für jeden Arbeitsauftrag darf maximal die hier ausgewiesene Verrechnungspunktzahl vergeben werden; diese detaillierte Aufschlüsselung der vergebenen Verrechnungspunkte ist bis zum Abschluss des Verfahrens aufzubewahren.

In die Korrekturformblätter werden nur die erreichten Verrechnungspunktzahlen für die Teilaufgaben eingetragen, so wie sie auf den Aufgabenblättern ausgewiesen sind.

Erst die Endsumme aller erteilten Verrechnungspunkte (max. 60 VP) ist ggf. aufzurunden.

<u>Zum Pflichtteil:</u>

Aufgabe 1

$f'(x) = 8 \cdot (\sin(x)+3)^7 \cdot \cos(x)$ (1,5 VP)

Aufgabe 2

$F(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln(3x+1) + 5x$ (1,5 VP)

Aufgabe 3

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$.
$f(0) = 0$ liefert $d = 0$, $f'(0) = 0$ liefert $c = 0$, $f(1) = -2$ und $f''(1) = 0$ führen auf $a + b = -2$ und $6a + 2b = 0$ mit der Lösung $a = 1$ und $b = -3$. Ein Funktionsterm von f ist $f(x) = x^3 - 3x^2$.

(3 VP)

Aufgabe 4

a)

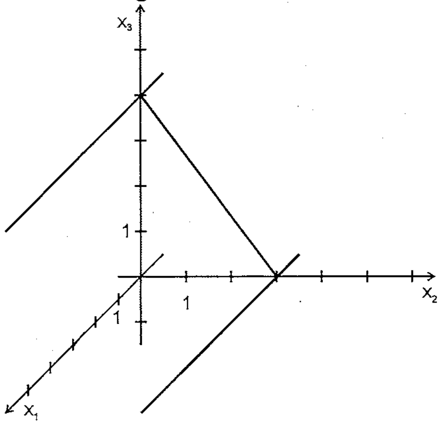
(1) Die Aussage ist falsch. Wenn F eine Stammfunktion von f ist, so zeigt die Abbildung, dass der Graph von $F' = f$ nur eine Nullstelle mit VZW von – nach + besitzt. An dieser Stelle hat der Graph von F einen Tiefpunkt. (1 VP)

(2) Die Aussage ist wahr. Man liest am Graphen ab: $f(4) = 2$ und $f'(2) < 0$. (1 VP)

b) $g'(x) = 2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x)$. Also ist $g'(1) = 2 \cdot f(1) + f'(1) = 2 \cdot 2 + 0 = 4$. (2 VP)

Aufgabe 5

a) Darstellung von E im Koordinatensystem:



(1 VP)

b) Die Spurgerade von E in der x_1x_3-Ebene wird auf sich selbst abgebildet. Der Punkt $P(0\,|\,3\,|\,0)$ wird auf den Punkt $P^*(0\,|\,-3\,|\,0)$ abgebildet.

Damit ergibt sich $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ (1,5 VP)

Aufgabe 6

a) Schnitt von g und h führt auf die Gleichung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ mit der

Lösung $r = t = \frac{1}{2}$. Die Geraden schneiden sich im Punkt $S(3\,|\,3{,}5\,|\,-0{,}5)$. (2,5 VP)

b) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, also besitzt das Dreieck bei P einen rechten Winkel. (1 VP)

c) $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, somit $T(2\,|\,-1\,|\,-4)$. (1 VP)

Aufgabe 7

a) Abbildung 1 zeigt nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, weil dieser Abbildung $P(X > 12) \neq 0$ zu entnehmen ist.

Abbildung 3 zeigt nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, weil die Summe der Wahrscheinlichkeiten hier größer als 1 ist. (1,5 VP)

b) Da der Erwartungswert ganzzahlig ist, lässt sich der Abbildung 2 entnehmen, dass $E(X) = 8$ ist. Wegen $E(X) = 12p = 8 \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$ sind 10 der 15 Kugeln rot. (1,5 VP)

Zum Wahlteil:

Aufgabe A 1.1

a) Koordinaten des Hochpunkts (2,5 VP)

$f'(x) = 0,3x^2 + 1,2x$, der Ansatz $f'(x) = 0$ führt auf $x_1 = 0$ und $x_2 = -4$. Der Graph zeigt, dass der Hochpunkt an der Stelle $x_2 = -4$ ist. Mit $f(-4) = 3,2$ ergibt sich $H(-4\,|\,3,2)$.

Nachweis der Schnittstelle (1 VP)

$f(2) = 3,2$

b) Wassermenge (3 VP)

Inhalt der Querschnittsfläche $A = \int_{-4}^{2} (3,2 - f(x))\,dx = \left[3,2x - 0,025x^4 - 0,2x^3\right]_{-4}^{2} = 10,8$

Volumen $V = 200 \cdot 10,8 = 2160$

Der Kanal kann höchstens eine Wassermenge von 2160 m^3 aufnehmen.

Bedeutung im Sachzusammenhang (1,5 VP)

Wenn das Wasser im Kanal an der tiefsten Stelle a Meter hoch steht, dann beträgt die Breite der Wasserfläche $x_3 - x_2$ Meter und es befinden sich 1000 m^3 Wasser im Kanal.

Aufgabe A 1.2

Zeitpunkte (1 VP)

Zu den Zeitpunkten $t_1 = 5$ und $t_2 = 35$ beträgt die momentane Zuflussrate 8 m^3 pro Minute.

Zeitpunkt der größten Wassermenge (1,5 VP)

Nachdem die Pumpe in Betrieb genommen wird, ist die momentane Zuflussrate zunächst größer als 8 m^3 pro Stunde. Ab dem Zeitpunkt $t_2 = 35$ ist sie kleiner, damit sinkt ab da die Wassermenge. Folglich befindet sich zu diesem Zeitpunkt die größte Wassermenge im Becken.

Dauer, bis das Becken leer ist (3 VP)

Zufluss ins Becken: $\int_{0}^{45} z(t)\,dt = \left[-\frac{1}{150}t^3 + 0,4t^2 + 4,5t\right]_{0}^{45} = 405$,

Bestand nach 45 Minuten: $195 + 405 = 600$. Es ist $600 : 8 = 75$.

Nach Inbetriebnahme der Pumpe dauert es 75 Minuten, bis das Becken leer ist.

Aufgabe A 1.3

a) Entstehung des Graphen (1 VP)

Der Graph von f_1 entsteht aus dem von g durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{2}{\pi}$ und Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{4}{\pi}$.

b) Länge der Strecke PQ (3 VP)

$f_a'(x) = 2a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ und $f_a'(0) = 2a$. Die Tangente im Punkt O hat die Gleichung $y = 2ax$, die Normale im Punkt O hat die Gleichung $y = -\frac{1}{2a}x$.

Damit ist $P(1|2a)$ und $Q\left(1\middle|-\frac{1}{2a}\right)$. Somit hat die Strecke PQ die Länge $2a + \frac{1}{2a}$.

Berechnung des Werts von a (2,5 VP)

Gesucht ist die Minimumstelle von g mit $g(a) = 2a + \frac{1}{2a}$. Es ist $g'(a) = 2 - \frac{1}{2a^2}$.

Der Ansatz $g'(a) = 0$ führt wegen $a > 0$ auf $a_1 = \frac{1}{2}$.

Für $a = \frac{1}{2}$ wird die Länge der Strecke PQ minimal.

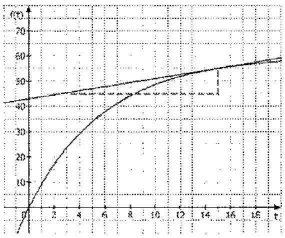
Aufgabe A 2.1

a) Fallgeschwindigkeit nach 6 Sekunden (0,5 VP)

$f(6) \approx 38$.

6 Sekunden nach dem Absprung beträgt die Fallgeschwindigkeit ca. 38 Meter pro Sekunde.

Momentane Änderungsrate nach 15 Sekunden (1 VP)



$f'(15) \approx \frac{10}{12} \approx 0{,}8$

15 Sekunden nach dem Absprung beträgt die momentane Änderungsrate der Fallgeschwindigkeit ca. 0,8 m/s pro Sekunde.

Länge der zurückgelegten Strecke (1,5 VP)

Der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall $[10;\,14]$ beträgt ca. 41 Kästchen. Dies entspricht $41 \cdot 5 = 205$ Metern.

Der Springer legt im Zeitraum zwischen 10 und 14 Sekunden nach dem Absprung ca. 205 Meter zurück.

b) Bestimmung des Zeitpunkts (1,5 VP)

Der Ansatz $g(u) = 20$ führt auf die Gleichung $5 + 50 \cdot e^{-0{,}4u} = 20$ mit der Lösung

$u_1 = -\frac{\ln(0{,}3)}{0{,}4} \approx 3{,}01$.

Etwa 3 Sekunden nach Öffnen des Fallschirms beträgt die Fallgeschwindigkeit 20 Meter pro Sekunde.

Nachweis der Höhe (2,5 VP)

$$800 - \int_0^{15} g(u)\,du = 800 - \left[5u - 125 \cdot e^{-0{,}4u}\right]_0^{15} \approx 600{,}31$$

Also befindet sich der Springer nach 15 Sekunden ca. 600 m über dem Erdboden.

c) Angabe des Grenzwerts (0,5 VP)

Für $u \to \infty$ gilt $g(u) \to 5$.

Nachweis der strengen Monotonie (1,5 VP)

$g'(u) = -20 \cdot e^{-0{,}4u}$. Wegen $e^{-0{,}4u} > 0$ für alle $u \in \mathbb{R}$ ist $g'(u) < 0$, somit ist die

Funktion g streng monoton fallend.

Fallgeschwindigkeit nach 15 Sekunden (0,5 VP)

Die Fallgeschwindigkeit 15 Sekunden nach dem Öffnen des Schirms beträgt ca. 5,12 Meter pro Sekunde.

Erläuterung des Terms (2 VP)

15 Sekunden nach Öffnen des Schirms befindet sich der Fallschirmspringer in 600 Meter Höhe und seine Fallgeschwindigkeit beträgt $g(15)$ Meter pro Sekunde. Die Fallgeschwindigkeit ändert sich ab diesem Zeitpunkt nur noch wenig. Wenn sie konstant beim Wert $g(15)$ bliebe, erreichte der Springer $\frac{600}{g(15)}$ Sekunden später den Boden.

Somit erreicht er näherungsweise nach $15+\frac{600}{g(15)}$ Sekunden den Boden.

Entscheidung (1 VP)

Da g streng monoton fallend ist, ist $g(u) < g(15)$ für $u > 15$. Somit ist der Näherungswert zu klein.

Aufgabe A 2.2

a) Berechnung der Nullstelle (1,5 VP)

Der Ansatz $f_6(x)=0$ führt auf die Gleichung $\frac{6}{x+1}+4-6=0$ mit der Lösung $x_1=2$.

Entstehung des Graphen (1,5 VP)

Der Graph von f_6 entsteht aus dem Graphen von g durch Streckung mit dem Faktor 6 in y-Richtung, Verschiebung um –2 in y-Richtung und Verschiebung um –1 in x-Richtung.

b) Asymptoten (1,5 VP)

$x=-1$ und $y=4-a$

c) Schnittpunkt S (3 VP)

$f_a'(x)=-\frac{a}{(x+1)^2}$.

Tangente: $y=f_a'(0)\cdot(x-0)+f_a(0)$, also $y=-a\cdot x+4$

Schnittpunkt: Der Ansatz $4-a=-a\cdot x+4$ führt auf $x_2=1$.

Damit ist die x-Koordinate von S unabhängig von a.

Aufgabe B 1.1

a) Winkel (1,5 VP)

$$\sin\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{20}}$$ ergibt $\alpha \approx 26{,}6°$

Koordinaten eines Punktes auf g (1,5 VP)

Der Punkt $P(1+2t\,|\,1+4t\,|\,1)$ auf der Geraden g hat zur x_2x_3-Ebene den Abstand $|1+2t|$.

Eine Lösung der Gleichung $|1+2t| = 7$ ist $t = 3$, somit ist $P(7\,|\,13\,|\,1)$ solch ein Punkt.

b) Gleichung der Ebene E (1,5 VP)

Der Mittelpunkt $M(2\,|\,3\,|\,1)$ der Strecke AB liegt auf E, und der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E. Damit ergibt sich $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} = 0$.

Aufgabe B 1.2

a) Gleichung der Schnittgerade (1,5 VP)

Schnitt von E_3 und E_1 führt auf $\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 1 & 2 & 1\\2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$ mit den Lösungen $(t;1-2t;-t)$.

Somit ergibt sich $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

Untersuchung der Lage (1 VP)

Schnitt von g und E_k führt auf $(k+1)\cdot t + 1 - 2t - (k-1)\cdot t = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$.

Die Gerade liegt in jeder Ebene E_k.

b) Möglicher Wert von k (3 VP)

Schnitt von h mit E_3 führt zur Gleichung $4(1+r)+3-2r+2(2r)=1$ mit der Lösung $r=-1$,

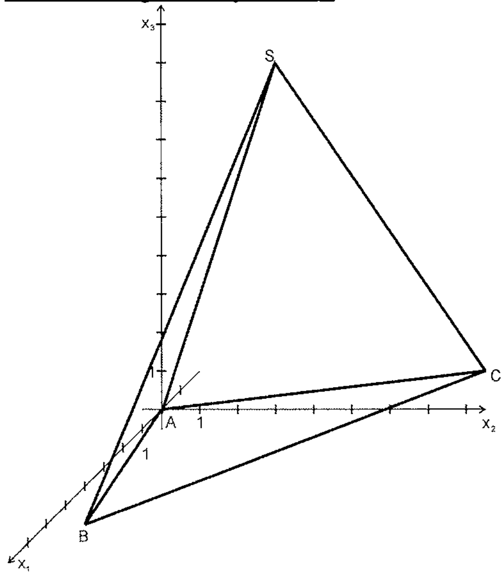
damit ergibt sich $P(0\,|\,5\,|\,-2)$. Der Punkt Q mit $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 12\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix}$ liegt auf h

und hat zu P den Abstand 12.

Punktprobe $Q \in E_k$ führt auf die Gleichung $(k+1)\cdot 4 - 3 + (k-1)\cdot 6 = 1$ mit der Lösung $k = \frac{3}{5}$.

Aufgabe B 2

a) Darstellung der Pyramide (1 VP)



Winkel (1 VP)

$\sin\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\4\\10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{120}}$ ergibt $\alpha \approx 65{,}9°$.

Koordinatengleichung der Ebene E (2 VP)

$E: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r\cdot\overrightarrow{BC} + s\cdot\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-8\\6\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\10\end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, mit $B \in E$ ergibt sich somit

$E: 3x_1 + 4x_2 = 22$.

Lage von E im Koordinatensystem (0,5 VP)
Die Ebene E liegt parallel zur x_3 -Achse.

b) Punktkoordinaten (2,5 VP)

Punktprobe mit $P(a\,|\,a\,|\,a)$ führt zur Gleichung $3a + 4a = 22$ mit der Lösung $a = \frac{22}{7}$

und somit zu $P(\frac{22}{7}\,|\,\frac{22}{7}\,|\,\frac{22}{7})$.

Punktprobe mit $Q(-a\,|\,a\,|\,a)$ führt zur Gleichung $-3a + 4a = 22$ mit der Lösung $a = 22$

und somit zu $Q(-22\,|\,22\,|\,22)$.

c) Nachweis Gleichschenkligkeit (1 VP)

$$|\overrightarrow{BS}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{125}\,,\ |\overrightarrow{CS}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{125}$$

Mögliche Lage von S* (2 VP)

Der Punkt $M(2\,|\,4\,|\,0)$ ist der Mittelpunkt der Strecke BC.

Da das gleichschenklige Dreieck BCS senkrecht zur x_1x_2-Ebene liegt und die Strecke BC in der x_1x_2-Ebene liegt, erhält man einen möglichen Punkt mit $\overrightarrow{OS^*} = \overrightarrow{OM} + d(M,S)\cdot\overrightarrow{n_0}$, wobei $\overrightarrow{n_0}$ ein Normaleneinheitsvektor der Ebene E ist.

$$\overrightarrow{OS^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 10\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}\text{, somit } S^*(8\,|\,12\,|\,0)$$

Aufgabe C 1

a) Ereignis A (0,5 VP)

$P(A)=\left(\frac{11}{12}\right)^8 \approx 0{,}499$

Ereignis B (1 VP)

X_1 : Anzahl der geworfenen Einsen, X_1 ist binomialverteilt mit $n=8$ und $p=\frac{5}{12}$.

$P(B)=P(X_1 \geq 3) \approx 0{,}718$

Ereignis C (1,5 VP)

$P(C)=3\cdot\left(\frac{9}{12}\right)^6\cdot\left(\frac{3}{12}\right)^2 \approx 0{,}033$

b) Durchschnittlicher Gewinn (2,5 VP)

A: Auszahlung in Euro, X_2: Summe der geworfenen Zahlen

$E(A)=5\cdot P(X_2 \leq 4)=5\cdot\left(P(X_2=3)+P(X_2=4)\right)=5\cdot\left(\left(\frac{5}{12}\right)^3+3\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{12}\right)\right)=\frac{125}{216}$.

$1-\frac{125}{216}\approx 0{,}421$.

Die Klasse erzielt auf lange Sicht durchschnittlich ca. 0,42 Euro pro Spiel.

c) Entscheidungsregel (2,5 VP)

X_3 : Anzahl der Würfe, bei denen der Körper die Zahl 3 zeigt

$H_0: p \geq \frac{1}{3}$

Trifft H_0 zu, so ist X_3 im Extremfall binomialverteilt mit $n=100$ und $p=\frac{1}{3}$.

Gesucht ist die größte natürliche Zahl k mit $P(X_3 \leq k)\leq 0{,}05$.

Es ist $P(X_3 \leq 25)\approx 0{,}046$ und $P(X_3 \leq 26)\approx 0{,}071$.

Entscheidungsregel:
Zeigen höchstens 25 Würfe die Zahl 3, so wird die Nullhypothese verworfen, ansonsten wird sie nicht verworfen.

d) Anzahl der grünen Seiten (2 VP)

X_4: Anzahl der Würfe, bei denen „grün" geworfen wird.

Beschreibt g die Anzahl der grünen Seiten, so ist X_4 binomialverteilt mit $n=10$ und $p=\frac{g}{12}$.

Gesucht ist die größte natürliche Zahl g mit $P(X_4 \geq 8)<0{,}15$, d.h. mit $P(X_4 \leq 7)>0{,}85$.

Für $g=7$ ist $P(X_4 \leq 7)\approx 0{,}858$, für $g=8$ ist $P(X_4 \leq 7)\approx 0{,}701$.

Der Körper kann höchstens sieben grüne Seiten haben.

Aufgabe C 2

a) Ereignis A (0,5 VP)

X_1: Anzahl der defekten Bauteile, X_1 ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}2$.

$P(A) = P(X_1 = 20) \approx 0{,}099$

Ereignis B (1,5 VP)

$P(B) = P(15 \le X_1 \le 25) = P(X_1 \le 25) - P(X_1 \le 14) \approx 0{,}832$

Ereignis C

X_2: Anzahl der defekten Bauteile, X_2 ist binomialverteilt mit $n = 99$ und $p = 0{,}2$.

$P(C) = 0{,}2 \cdot P(X_2 = 18) \approx 0{,}019$

b) Mindestanzahl der zu entnehmenden Bauteile (2 VP)

X_3: Anzahl der funktionierenden Bauteile, X_3 ist binomialverteilt mit unbekanntem n

und $p = 0{,}8$. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n mit $P(X_3 \ge 5) \ge 0{,}99$, d.h.

$P(X_3 \le 4) \le 0{,}01$.

Für $n = 9$ ist $P(X_3 \le 4) \approx 0{,}020$, für $n = 10$ ist $P(X_3 \le 4) \approx 0{,}006$.

Er muss mindestens 10 Bauteile entnehmen.

c) Durchschnittliche Einnahmen (2 VP)

X_4: Einnahme pro Bauteil in Euro

	Kunde wählt Option 1, Bauteil ist defekt	Kunde wählt Option 1, Bauteil ist intakt	Kunde wählt Option 2
Einnahme k	0	4	3
$P(X_4 = k)$	irrelevant	$0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$	0,7

$E(X_4) = 4 \cdot 0{,}24 + 3 \cdot 0{,}7 = 3{,}06$.

Die durchschnittliche Einnahmen, die er langfristig beim Verkauf eines Bauteils erzielt, betragen 3,06 Euro.

d) Entscheidungsregel (2,5 VP)

X_5: Anzahl der defekten Bauteile in der Stichprobe

$H_0: p \le 0{,}2$

Trifft H_0 zu, so ist X_5 im Extremfall binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0{,}2$.

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl k mit $P(X_5 \ge k) \le 0{,}05$, d.h. $P(X_5 \le k-1) \ge 0{,}95$.

Es ist $P(X_5 \le 48) \approx 0{,}931$ und $P(X_5 \le 49) \approx 0{,}951$. Aus $k - 1 = 49$ folgt $k = 50$.

Entscheidungsregel:

Sind mindestens 50 Bauteile der Stichprobe defekt, so wird die Nullhypothese verworfen, ansonsten kann sie nicht verworfen werden.

