Baden-Württemberg

MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Hinweise für die Abiturientinnen und Abiturienten

Abiturprüfung an den allgemein bildenden Gymnasien

Nachtermin 2019

Prüfungsfach: Mathematik

Bearbeitungszeit: 270 Minuten

Hilfsmittel: Die „Merkhilfe"

Der im Kurs eingeführte wissenschaftliche Taschenrechner

Nachschlagewerke zur deutschen Rechtschreibung

Hinweise: Sie erhalten **vier** Aufgaben:

1. Die Aufgaben des Pflichtteils
2. Eine Wahlteil-Aufgabe Analysis (A 1 oder A 2)
3. Eine Wahlteil-Aufgabe Analytische Geometrie (B 1 oder B 2)
4. Eine Wahlteil-Aufgabe Stochastik (C 1 oder C 2)

Es sind **alle vier** vorgelegten Aufgaben zu bearbeiten.

Im **ersten Teil** der Prüfungszeit bearbeiten Sie die Aufgaben des Pflichtteils **ohne Hilfsmittel**.

Nach Abgabe der bearbeiteten Aufgaben des Pflichtteils erhalten Sie die **zugelassenen Hilfsmittel** für die Bearbeitung der **drei** Wahlteil-Aufgaben.

Verwenden Sie für die Reinschrift und den Entwurf je Aufgabe einen neuen Bogen.

Vermerken Sie auf jedem Bogen die Nummer der bearbeiteten Aufgabe.

Sie sind verpflichtet, die Ihnen vorgelegten Aufgaben auf ihre Vollständigkeit (Anzahl der Blätter, Anlagen usw.) zu überprüfen.

Lösungen auf den Aufgabenblättern werden nicht gewertet; ausgenommen sind Eintragungen in Abbildungen, die auf entsprechend gekennzeichneten Anlagen vorzunehmen sind.

Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Abiturprüfung an den allgemein bildenden Gymnasien

Prüfungsfach: **Mathematik**

Nachtermin 2019 **Pflichtteil** **Blatt 1 - 2**

Aufgabe 1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (\sin(x) + 3)^8$.

(1,5 VP)

Aufgabe 2

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3x+1} + 5 \quad , \quad x > 0$.

(1,5 VP)

Aufgabe 3

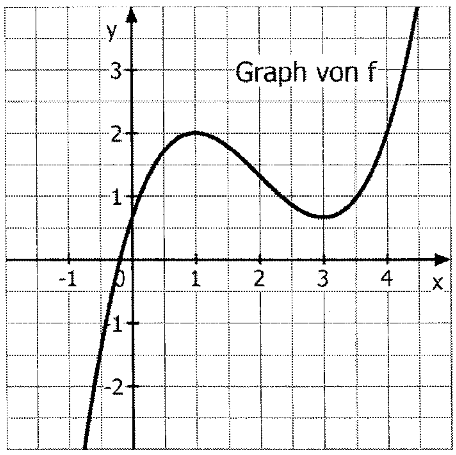
Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat im Ursprung einen Hochpunkt und den Wendepunkt $W(1|-2)$.

Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f.

(3 VP)

Aufgabe 4

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.



a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidungen.
   (1) Der Graph jeder Stammfunktion von f besitzt für $-1 \le x \le 4$ einen Hochpunkt.
   (2) $f'(f(4)) < 0$

b) Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = x^2 \cdot f(x)$.
Bestimmen Sie $g'(1)$.

(4 VP)

Aufgabe 5

Gegeben ist die Ebene $E: 4x_2 + 3x_3 = 12$.

a) Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.

b) Die Ebene F entsteht durch Spiegelung von E an der x_1x_3-Ebene.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F.

(2,5 VP)

PFLICHTTEIL

Aufgabe 6

Gegeben sind die Punkte $P(5\,|\,4\,|\,3)$, $Q(1\,|\,3\,|\,-4)$ und $R(6\,|\,0\,|\,3)$ sowie die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$. Die Punkte P und Q liegen auf der Geraden h.

a) Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h und ermitteln Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts.

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR bei P einen rechten Winkel besitzt.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, der das Dreieck PQR zu einem Rechteck ergänzt.

(4,5 VP)

Aufgabe 7

In einer Urne befinden sich blaue und rote Kugeln, insgesamt sind es 15 Stück. Es wird 12-mal zufällig eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln. Eine der drei folgenden Abbildungen zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

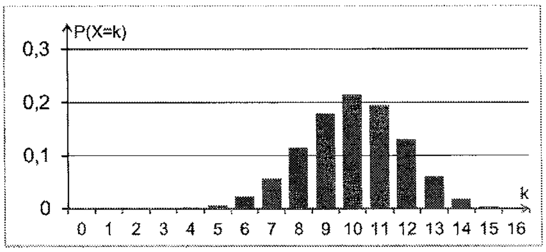


Abb. 1

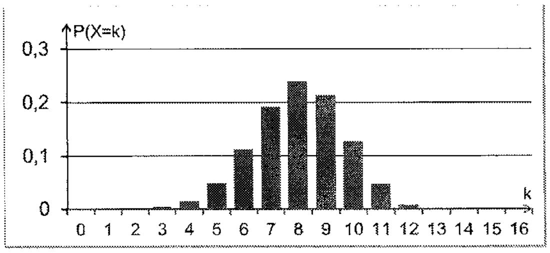


Abb. 2

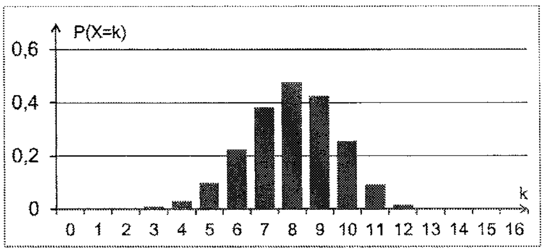


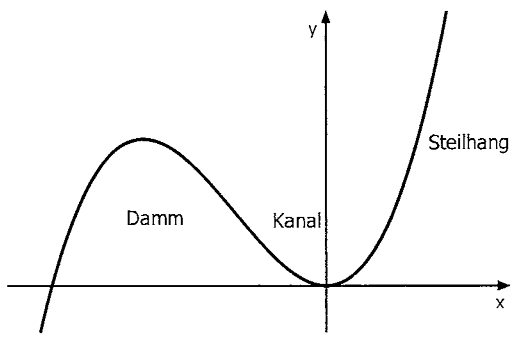
Abb. 3

a) Begründen Sie, dass Abbildung 1 und Abbildung 3 nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X darstellen.

b) Der Erwartungswert von X ist ganzzahlig.
Bestimmen Sie die Anzahl der roten Kugeln in der Urne.

(3 VP)

Aufgabe A 1.1



Ein 200 m langer Kanal wird auf der einen Seite durch einen Damm und auf der anderen Seite durch einen Steilhang begrenzt. Der Kanal verläuft geradlinig und hat auf seiner gesamten Länge denselben Querschnitt. Der Graph der Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}6x^2$$

beschreibt modellhaft für $-6 \le x \le 3$ das Profil des Geländequerschnitts (Koordinatenangaben in Meter). Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts H von G_f.
Weisen Sie nach, dass die Parallele zur x-Achse durch H den Graphen G_f an der Stelle $x_0 = 2$ schneidet.
(Teilergebnis: $H(-4 \mid 3{,}2)$) (3,5 VP)

b) Berechnen Sie das Volumen der Wassermenge, die der Kanal höchstens aufnehmen kann.

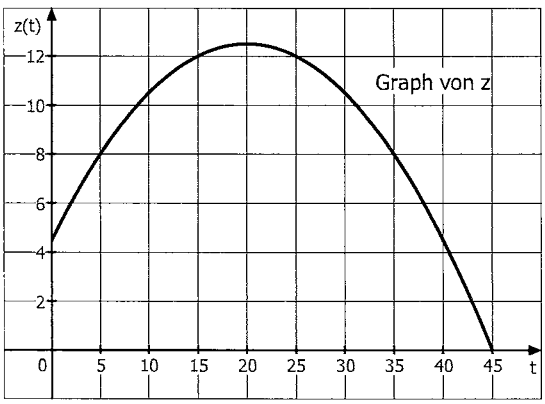
Es gibt ein a mit $0 < a < 3{,}2$, für das die beiden folgenden Aussagen gelten:

- Die Gleichung $f(x) = a$ besitzt drei verschiedene Lösungen $x_1 < x_2 < x_3$.
- $200 \cdot \int_{x_2}^{x_3} (a - f(x))\,dx = 1000$

Geben Sie die Bedeutung der Werte a und $x_3 - x_2$ sowie der Zahl 1000 im Sachzusammenhang an.

(4,5 VP)

Aufgabe A 1.2



In einem Becken befinden sich zunächst 195 m^3 Wasser. Nach Öffnen einer Schleuse fließt 45 Minuten lang Wasser in das Becken. Die momentane Zuflussrate wird dabei durch die Funktion z mit

$$z(t) = -0{,}02t^2 + 0{,}8t + 4{,}5 \text{ für } 0 \le t \le 45$$

beschrieben (Zeit t in Minuten seit Öffnen der Schleuse, z(t) in m^3 pro Minute).
Die Abbildung zeigt den Graphen von z.

Geben Sie die Zeitpunkte an, zu denen die momentane Zuflussrate 8 m^3 pro Minute beträgt.

30 Minuten nach dem Öffnen der Schleuse wird eine Pumpe in Betrieb genommen. Diese pumpt konstant 8 m^3 Wasser pro Minute aus dem Becken, bis das Becken leer ist.

Begründen Sie, dass zum Zeitpunkt $t = 35$ die größte Wassermenge im Becken ist.
Berechnen Sie, wie lange es nach Inbetriebnahme der Pumpe dauert, bis das Becken leer ist.

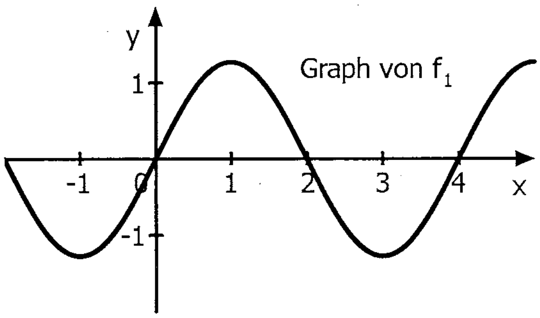
(5,5 VP)

Aufgabe A 1.3

Für jedes a mit $a > 0$ ist die Funktion f_a durch

$f_a(x) = \frac{4a}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ gegeben.

Die Abbildung zeigt den Graphen von f_1.



a) Zunächst ist $a = 1$.
Beschreiben Sie, wie der Graph von f_1 aus dem Graphen von g mit $g(x) = \sin(x)$ hervorgeht.

(1 VP)

b) Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $O(0\,|\,0)$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ im Punkt P.
Die Normale an den Graphen von f_a im Punkt $O(0\,|\,0)$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ im Punkt Q.
Zeigen Sie, dass die Strecke PQ die Länge $2a + \frac{1}{2a}$ hat.
Es gibt einen Wert von a, für den diese Länge minimal wird.
Berechnen Sie diesen Wert von a.

(5,5 VP)

Aufgabe A 2.1

Ein Fallschirmspringer springt aus einem Flugzeug. Solange sein Fallschirm noch geschlossen ist, kann seine Fallgeschwindigkeit durch eine Funktion f beschrieben werden.

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen dieser Funktion f. Dabei ist t die seit dem Absprung vergangene Zeit in Sekunden und f(t) die Fallgeschwindigkeit in Meter pro Sekunde.

a) Geben Sie die Fallgeschwindigkeit 6 Sekunden nach dem Absprung an.
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Fallgeschwindigkeit 15 Sekunden nach dem Absprung.
Bestimmen Sie die Länge der Strecke, die der Springer im Zeitraum zwischen 10 Sekunden und 14 Sekunden nach dem Absprung zurücklegt.

(3 VP)

Der Springer öffnet den Fallschirm in einer Höhe von 800 m über dem Erdboden. Seine Fallgeschwindigkeit wird dann beschrieben durch die Funktion g mit

$$g(u) = 5 + 50 \cdot e^{-0{,}4u}$$

(u in Sekunden seit dem Öffnen des Fallschirms, g(u) in Meter pro Sekunde).

b) Berechnen Sie, wie viele Sekunden nach dem Öffnen des Fallschirms der Springer eine Fallgeschwindigkeit von 20 Meter pro Sekunde hat.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Springer sich 15 Sekunden nach dem Öffnen des Fallschirms noch etwa 600 m über dem Erdboden befindet.

(4 VP)

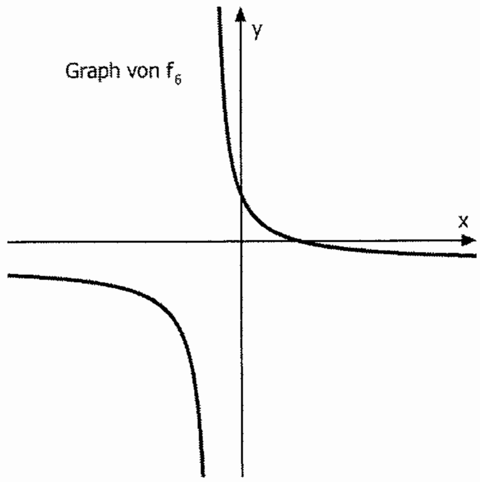
c) Geben Sie den Grenzwert der Funktion g für $u \to +\infty$ an.
Zeigen Sie, dass die Funktion g streng monoton fallend ist.
Geben Sie die Fallgeschwindigkeit an, die der Springer 15 Sekunden nach dem Öffnen des Fallschirms hat.
Der Springer erreicht zum Zeitpunkt u_0 nach Öffnen des Fallschirms den Erdboden.
Erläutern Sie, dass durch den Term $15 + \frac{600}{g(15)}$ ein Näherungswert für u_0 berechnet werden kann.
Entscheiden Sie, ob dieser Näherungswert zu groß oder zu klein ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(5,5 VP)

Aufgabe A 2.2

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben mit

$$f_a(x) = \frac{a}{x+1} + 4 - a.$$



a) Die Abbildung zeigt den Graphen von f_6.
Berechnen Sie die Nullstelle von f_6.
Beschreiben Sie, wie der Graph von f_6 aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x}$ hervorgeht.

(3 VP)

b) Der Graph von f_a besitzt zwei Asymptoten.
Geben Sie deren Gleichungen an.

(1,5 VP)

c) Die Tangente an den Graphen von f_a an der Stelle $x_0 = 0$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = 4 - a$ im Punkt S.
Zeigen Sie, dass die x-Koordinate des Punktes S unabhängig von a ist.

(3 VP)

Nachtermin 2019

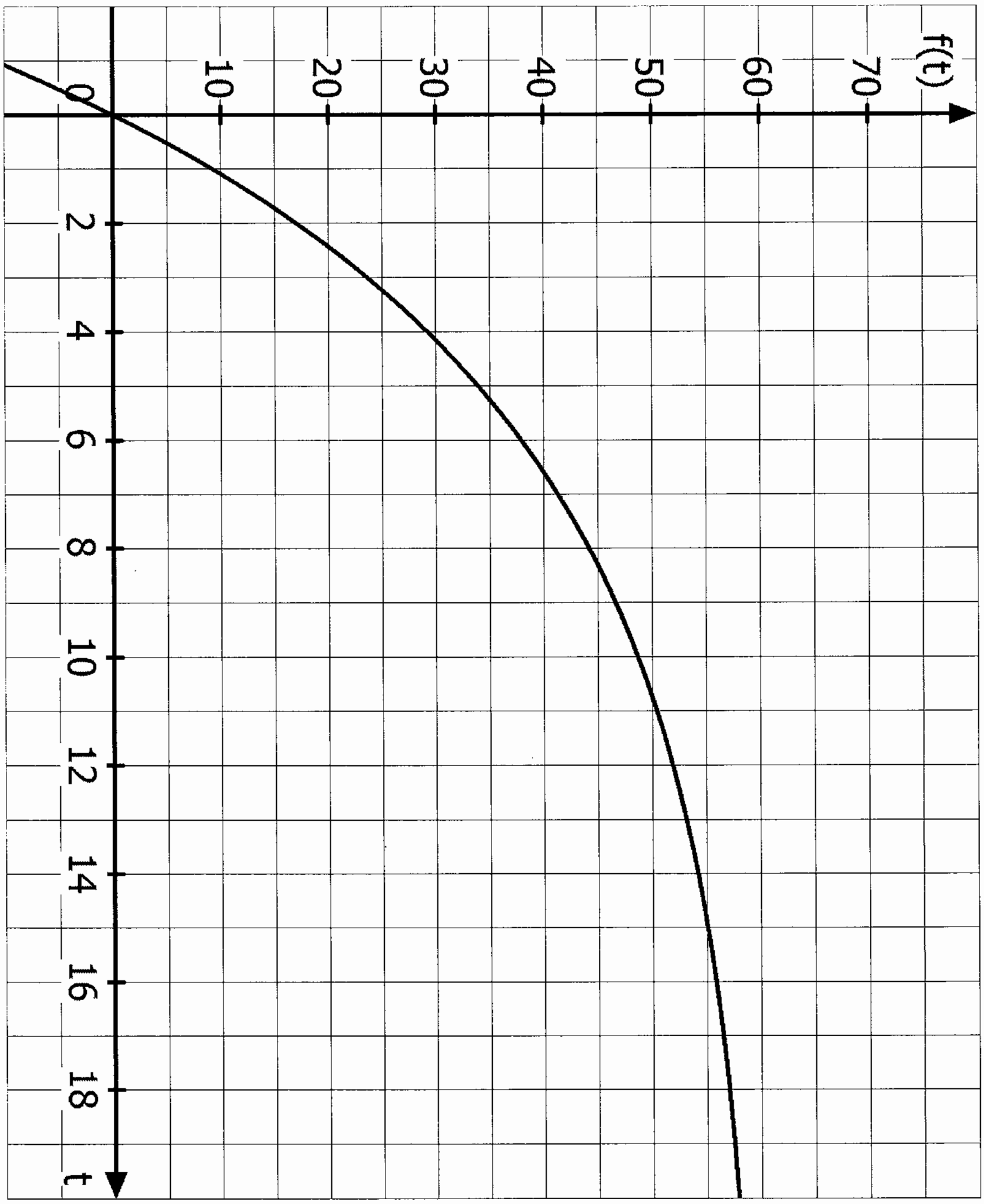
Zu- und Vorname: ______________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Prüfungsfach: M a t h e m a t i k

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Abbildung zu Aufgabe A 2.1



Aufgabe B 1.1

Die Gerade g enthält die Punkte $A(1|1|1)$ und $B(3|5|1)$.

a) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den g mit der x_2x_3-Ebene einschließt.
Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes von g, der von der x_2x_3-Ebene den Abstand 7 hat.

(3 VP)

b) Für die Ebene E gilt: Wenn man den Punkt A an E spiegelt, erhält man den Punkt B.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E.

(1,5 VP)

Aufgabe B 1.2

Für jede reelle Zahl k ist eine Ebene E_k gegeben durch

$$E_k:\ (k+1)\cdot x_1 + x_2 + (k-1)\cdot x_3 = 1\ .$$

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgerade von E_1 und E_3.
Untersuchen Sie, ob diese Schnittgerade in jeder Ebene E_k liegt.

(2,5 VP)

b) Die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneidet die Ebene E_3 im Punkt P und eine weitere Ebene E_k im Punkt Q. Der Abstand von P und Q beträgt 12.
Berechnen Sie einen möglichen Wert von k.

(3 VP)

Die Punkte $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(6\,|\,1\,|\,0)$, $C(-2\,|\,7\,|\,0)$ und $S(2\,|\,4\,|\,10)$ sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide ABCS. Die Ebene E enthält die Punkte B, C und S.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Kante AS mit der x_1x_2-Ebene einschließt.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.
Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.
(Teilergebnis: E: $3x_1 + 4x_2 = 22$)

(4,5 VP)

b) Es gibt Punkte, die in E liegen und von allen Koordinatenebenen gleich weit entfernt sind.
Bestimmen Sie die Koordinaten zweier solcher Punkte.

(2,5 VP)

c) Betrachtet wird im Folgenden das Dreieck BCS.
Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.
Das Dreieck BCS kann so um die Strecke BC gedreht werden, dass das Bild S*
des Punktes S in der x_1x_2-Ebene liegt.
Berechnen Sie für eine mögliche Lage des Punktes S* dessen Koordinaten.

(3 VP)

Ein Holzkörper, der zwölf Seiten besitzt, wird zum Würfeln benutzt. Dabei kommt jede der zwölf Seiten mit derselben Wahrscheinlichkeit nach oben zu liegen. Jede Seite ist gemäß folgender Tabelle mit einer Zahl beschriftet.

Zahl	1	2	3	4
Anzahl der Seiten	5	1	4	2

Bei jedem Wurf gilt die Zahl als geworfen, die auf der oben liegenden Seite steht.

a) Der Körper wird achtmal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Die Zahl 2 wird nicht geworfen."
B: „Die Zahl 1 wird mindestens dreimal geworfen."
C: „Es werden genau sechs ungerade Zahlen geworfen und diese folgen unmittelbar aufeinander."

(3 VP)

b) Eine Klasse will für einen guten Zweck beim Schulfest folgendes Spiel anbieten: Für einen Euro Einsatz darf ein Spieler genau dreimal mit dem Körper würfeln. Beträgt die Summe der drei geworfenen Zahlen höchstens 4, dann bekommt der Spieler fünf Euro ausbezahlt. In allen anderen Fällen wird nichts ausbezahlt. Bestimmen Sie den Gewinn, mit dem die Klasse auf lange Sicht durchschnittlich pro Spiel rechnen kann.

(2,5 VP)

c) Es wird vermutet, dass beim Würfeln mit dem Körper zu selten die Zahl 3 geworfen wird. Um dies zu untersuchen, wird die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 3 beträgt mindestens $\frac{1}{3}$." auf der Grundlage einer Stichprobe von 100 Würfen und einem Signifikanzniveau von 5 % getestet. Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

(2,5 VP)

d) Einige Seiten des Körpers sind grün. Bei zehnmaligem Würfeln wird mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 15 % mindestens achtmal „grün" geworfen. Bestimmen Sie die Anzahl der grünen Seiten, die der Körper höchstens haben kann.

(2 VP)

Ein Händler bezieht sehr viele Bauteile. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein solches Bauteil defekt ist, beträgt 20 %.

a) Der Händler entnimmt einer Lieferung 100 Bauteile und untersucht sie nacheinander.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.
A: „Genau 20 Bauteile sind defekt."
B: „Es sind mindestens 15, aber weniger als 26 Bauteile defekt."
C: „Genau 19 Bauteile sind defekt, darunter auch das zuerst untersuchte."

(3,5 VP)

b) Ermitteln Sie, wie viele Bauteile der Händler einer Lieferung mindestens entnehmen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens fünf funktionierende Bauteile darunter sind.

(2 VP)

c) Der Händler weist die Kunden auf die hohe Defektwahrscheinlichkeit hin und bietet zwei Kaufoptionen an.
Option 1: Der Kunde bezahlt für ein Bauteil 4 Euro, die er zurückbekommt, falls das Bauteil defekt ist.
Option 2: Der Kunde bezahlt für ein Bauteil 3 Euro, die er nicht zurückbekommt, falls das Bauteil defekt ist.
30 % der Bauteile werden gemäß Option 1 gekauft, 70 % gemäß Option 2. Alle Kunden, die Option 1 gewählt haben, fordern ihr Geld im Falle eines Defekts zurück.
Bestimmen Sie die durchschnittlichen Einnahmen, die der Händler langfristig beim Verkauf eines Bauteils erzielt.

(2 VP)

d) Bei einer neuen Lieferung befürchtet der Händler, dass die Defektwahrscheinlichkeit größer geworden ist. Ob er die Lieferung zurücksendet, macht er vom Ergebnis eines Hypothesentests abhängig. Er testet die Nullhypothese
„Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil defekt ist, beträgt höchstens 20 %."
auf der Grundlage einer Stichprobe von 200 Bauteilen auf einem Signifikanzniveau von 5 %.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

(2,5 VP)

