Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Abiturprüfung an den allgemein bildenden Gymnasien

Prüfungsfach: **Mathematik**

Nachtermin 2018 **Pflichtteil** **Blatt 1 - 2**

Aufgabe 1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x}\cdot e^{-3x}$.

(2 VP)

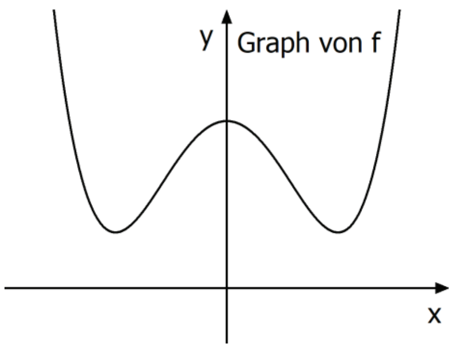
Aufgabe 2

Weisen Sie nach, dass $\pi\cdot\int_1^3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)dx < -3$ ist.

(2,5 VP)

Aufgabe 3

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^2+3$.



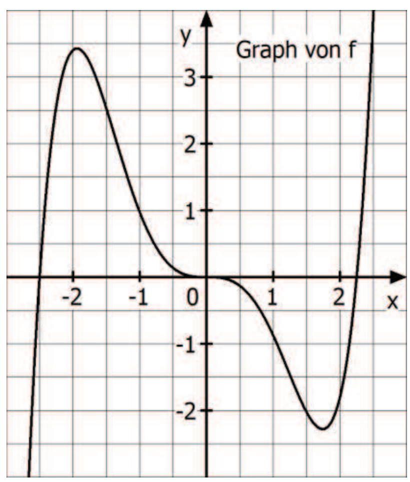
a) Berechnen Sie die Koordinaten der Tiefpunkte des Graphen von f.

b) Geben Sie an, für welche Werte von a $(a\in\mathbb{R})$ die Gleichung $f(x)=a$ genau zwei Lösungen besitzt.

(2,5 VP)

Aufgabe 4

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
F ist eine Stammfunktion von f.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.



(1) Der Graph von F besitzt an der Stelle $x=0$ einen Hochpunkt.

(2) Der Graph von F besitzt im Bereich $-2{,}5\le x\le 2{,}5$ eine Wendetangente mit positiver Steigung.

(3) $F(-1)<F(2)$

(3 VP)

Aufgabe 5

Bestimmen Sie diejenigen Werte für a, b und c, für die

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

gilt.

(3 VP)

Aufgabe 6

Gegeben ist die Ebene $E: x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 12$.
Die Punkte $P(5|1|5)$, $Q(6|3|8)$ und R liegen auf der Geraden g.

a) Untersuchen Sie, ob P und Q auf derselben Seite von E liegen.

b) P und R haben denselben Abstand von der Ebene E.
Bestimmen Sie die Koordinaten von R.

c) Begründen Sie, dass R und P nicht symmetrisch zur Ebene E liegen.

(4 VP)

Aufgabe 7

In einer Urne befinden sich sechs Kugeln, die mit Zahlen beschriftet sind.
Drei Kugeln tragen die Zahl „3“, zwei Kugeln die Zahl „2“ und eine Kugel die Zahl „1“.
Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X gibt die Summe der sich darauf befindenden Zahlen an.

a) Geben Sie an, welche Werte X annehmen kann.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 4)$.

(3 VP)

Aufgabe A 1.1

Zwischen zwei senkrecht auf dem Erdboden stehenden Masten soll ein Seil aufgehängt werden. Der Verlauf des Seils wird in einem Koordinatensystem dargestellt, dabei stellt die x-Achse den Erdboden dar. Der linke Mast steht an der Stelle $x = 0$ und der rechte Mast steht an der Stelle $x = 16$ (alle Koordinatenangaben in Meter).
Zunächst wird das durchhängende Seil beschrieben durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 9 \cdot e^{0,05x} + 25 \cdot e^{-0,05x} - 25 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 16.$$

a) Geben Sie die geringste Höhe des Seils über dem Boden an.
Geben Sie an, wo das Seil am steilsten verläuft.
Das Seil ist an den beiden Stellen markiert, die sich in 6 Metern Höhe befinden.
Ermitteln Sie den Abstand der beiden Markierungen.
Bestimmen Sie die durchschnittliche Höhe des Seils über dem Boden.

(4 VP)

b) Eine andere Beschreibung des Seils erfolgt durch den Graphen einer quadratischen Funktion g. Dabei wird davon ausgegangen, dass das Seil am linken Mast in 9 Metern Höhe angebracht ist und sich der tiefste Punkt im Abstand von 10 Metern zum linken Mast auf einer Höhe von 5 Metern befindet.
Bestimmen Sie einen Term der Funktion g.
Geben Sie die Höhe an, in der das Seil nach diesem Modell am rechten Mast befestigt ist.

(3 VP)

c) Für jedes $k > 0$ ist eine Funktion h_k gegeben durch

$$h_k(x) = 0,04x^2 - k \cdot x + 9 \; ; \; 0 \leq x \leq 16.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts T_k des Graphen von h_k.

Die Seillänge und die Höhe des rechten Befestigungspunkts werden nun variiert.
Wenn das Seil den Boden nicht berührt, kann es durch den Graphen einer Funktion h_k dargestellt werden.
Für welche Werte von k kann demnach durch den Graphen von h_k ein Verlauf des Seils dargestellt werden?

(3,5 VP)

d) Nun wird das Seil wieder durch den Graphen der Funktion f dargestellt.
Für die Länge s eines Kurvenstücks des Graphen von f im Bereich $a \le x \le b$ gilt:

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Bestimmen Sie mit dieser Formel die Länge des Seils zwischen den Befestigungspunkten.
An diesem Seil wird nun ein Gewicht so fixiert, dass sich der Verlauf des Seils näherungsweise zu zwei geradlinig verlaufenden Abschnitten verändert und dass sich der tiefste Punkt des Seils im Modell auf der Geraden $x = 8$ befindet.
Ermitteln Sie, welche geringste Höhe des Seils über dem Boden sich nun ergibt.

(3,5 VP)

Aufgabe A 1.2

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2 \cdot \sin(x);\ \ 0 \le x \le \pi$.
Die Punkte P und Q sind die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse.
Die Punkte R und S liegen auf dem Graphen von f.

a) Begründen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks PQR maximal wird, wenn R auf der Geraden $x = \frac{\pi}{2}$ liegt.

(1,5 VP)

b) Der Flächeninhalt des Dreiecks PQS ist um ein Viertel kleiner als der Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.
Bestimmen Sie die Koordinaten eines möglichen Punktes S.

(2,5 VP)

c) Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = 8 - 4 \cdot \sin(x);\ \ 0 \le x \le \pi$.
Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.

(2 VP)

Aufgabe A 2.1

Die Entwicklung der Weltbevölkerung wird im Folgenden beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{11{,}6}{1 + 3{,}6 \cdot e^{-0{,}028t}} \quad ; \; t \geq 0$$

(t in Jahren seit Beginn des Jahres 1950; $f(t)$ in Mrd. Menschen).

a) Berechnen Sie die Weltbevölkerung zu Beginn des Jahres 2019 nach diesem Modell.
Bestimmen Sie das Jahr, in dem sich die Weltbevölkerung laut diesem Modell gegenüber dem Jahr 1950 verdoppelt hat.
Ermitteln Sie, wann die Weltbevölkerung laut Modell am stärksten anstieg.
Geben Sie an, welcher Wert für die Weltbevölkerung langfristig zu erwarten ist.

(4 VP)

b) Ermitteln Sie, in welchem 10-Jahres-Zeitraum die durchschnittliche Weltbevölkerung laut Modell bei 6 Mrd. Menschen lag.

(2 VP)

c) Aus dem Modell ergibt sich für den Beginn des Jahres 2018 eine Weltbevölkerung, die um höchstens 10 % vom wirklichen Wert abweicht.
Ermitteln Sie den Bereich, in dem der wirkliche Wert liegt.

(2 VP)

Aufgabe A 2.2

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}2x^2 + 1{,}7x + 0{,}5$.

a) Der Graph von f und die Gerade g mit der Gleichung $y = 0{,}9$ schließen zwei Teilflächen ein.
Berechnen Sie deren Gesamtinhalt.

(2,5 VP)

b) Für ein u mit $0 < u < 4$ bilden die Punkte $A(u\,|\,f(u))$, $B(4\,|\,f(4))$ und $C(u\,|\,f(4))$ ein gleichschenkliges Dreieck.
Bestimmen Sie diesen Wert für u.

(3 VP)

c) Eine Gerade h durch den Punkt $P(0\,|\,4)$ schneidet den Graphen von f orthogonal in einem Punkt Q.
Bestimmen Sie die Koordinaten eines möglichen Punktes Q.

(3 VP)

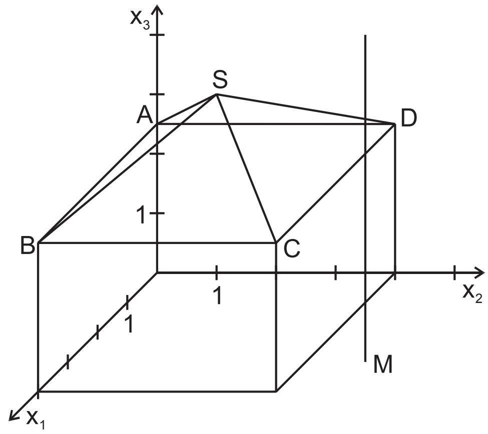
d) Die Funktion f gehört zu der Funktionenschar f_k mit

$$f_k(x) = k \cdot x^3 - 6k \cdot x^2 + 1{,}7x + 0{,}5 \;;\; k \neq 0.$$

Zeigen Sie, dass die Wendepunkte aller Graphen von f_k auf derselben Parallelen zur y-Achse liegen.
Bestimmen Sie alle Werte von k, für die der Wendepunkt des Graphen von f_k den Abstand 2,5 LE zum Koordinatenursprung hat.

(3,5 VP)

In einem Koordinatensystem wird das pyramidenförmige Dach eines Gartenhauses beschrieben durch die Punkte $A(0|0|2{,}5)$, $B(4|0|2{,}5)$, $C(4|4|2{,}5)$, $D(0|4|2{,}5)$ und die Spitze $S(2|2|4)$. Die Wände des Gartenhauses verlaufen ausgehend von den waagrechten Dachkanten senkrecht nach unten zum Erdboden, welcher durch die x_1x_2-Ebene beschrieben wird. An der Stelle, die durch $M(3|5|0)$ beschrieben wird, ist ein 5,5 m hoher Fahnenmast senkrecht zum Erdboden befestigt, (alle Koordinatenangaben in Meter).



a) Ermitteln Sie den Rauminhalt des Gartenhauses.
Die Punkte C, D und S liegen in der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Dachfläche, die durch das Dreieck CDS beschrieben wird, gegenüber dem Erdboden.

(3,5 VP)

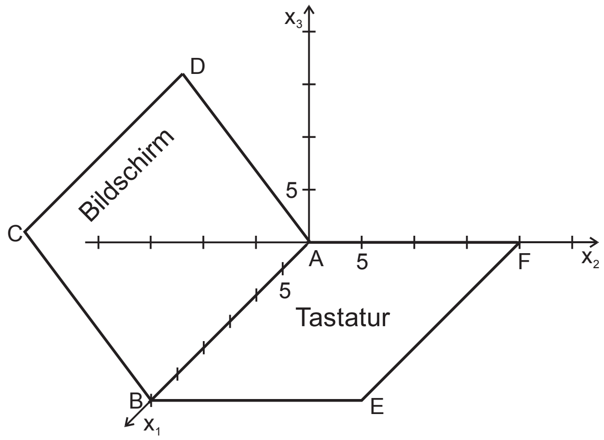
b) Eine Drohne überfliegt die Gartenanlage auf geradliniger Flugbahn mit der konstanten Geschwindigkeit zwei Meter pro Sekunde.
Der Punkt $P(7{,}5|-4|14)$ beschreibt die Position der Drohne zu Beobachtungsbeginn. Der Punkt $Q(5{,}5|-2|13)$ beschreibt einen Punkt auf der Flugbahn, den sie danach passiert.
Bestimmen Sie die Position der Drohne drei Sekunden nach Beobachtungsbeginn.
Bestimmen Sie den kleinsten Abstand der Drohne zur Spitze des Fahnenmasts.

(3,5 VP)

c) Bei einem Sturm wurde der obere Teil des Fahnenmasts abgeknickt. Der Punkt $L(3 | 3 | 3{,}25)$ beschreibt die Position der Spitze des Fahnenmasts nach dem Sturm.
Berechnen Sie, in welcher Höhe der Fahnenmast abgeknickt wurde.

(3 VP)

Ein Notebook besteht aus einem Bildschirm und einer Tastatur. Der Bildschirm und die Tastatur haben jeweils die Länge 30 cm und die Breite 20 cm. Die Tiefe dieser Bauteile wird vernachlässigt. In einem Koordinatensystem werden die Eckpunkte des Bildschirms durch die Punkte A, B, C und D beschrieben, wobei $D(0\,|-12\,|\,16)$ ist (alle Koordinatenangaben in Zentimeter). Die Eckpunkte der Tastatur werden durch A, B, E und F beschrieben, die in der x_1x_2-Ebene liegen. Die Kante AD befindet sich in der x_2x_3-Ebene (siehe Abbildung).



a) Geben Sie die Koordinaten des Punktes C an.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene K, die die Lage des Bildschirms beschreibt.
Berechnen Sie den Winkel zwischen Bildschirm und Tastatur.
(Teilergebnis: $K: 4x_2 + 3x_3 = 0$)

(3 VP)

b) Die Position des rechten Auges einer Person, die am Notebook arbeitet, wird durch den Punkt $R(10\,|\,40\,|\,50)$ beschrieben.
Bestimmen Sie den Punkt P der Ebene K mit der kleinsten Entfernung zu R.
Begründen Sie, dass P innerhalb des Rechtecks liegt, das die Bildschirmfläche beschreibt.
Berechnen Sie den Abstand des Auges zum Bildschirm.

(3 VP)

c) Das Notebook wird auf- und zugeklappt, wobei die Lage der Tastatur unverändert bleibt.
Der Winkel zwischen Bildschirm und Tastatur beträgt dabei maximal 180°.
Für gewisse Werte von u wird durch $D_u(0\,|\,u\,|\,d_3)$ eine mögliche Position der rechten oberen Ecke des Bildschirms beschrieben.
Begründen Sie, dass u nur Werte zwischen -20 und 20 annehmen kann.
Begründen Sie, dass $d_3 = \sqrt{400 - u^2}$ ist.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebenenschar E_u, die alle möglichen Lagen des Bildschirms beschreibt.

(4 VP)

Ein Multiple-Choice-Test besteht aus 12 Fragen mit jeweils 3 Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Ein Teilnehmer hat keinerlei Kenntnisse und kreuzt daher bei jeder Frage zufällig eine Antwortmöglichkeit an. Zum Bestehen des Tests muss der Teilnehmer mindestens 7 Fragen richtig beantworten.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Teilnehmer alle Fragen falsch beantwortet.
Geben Sie ein Ereignis E an, dessen Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet werden kann: $P(E) = \binom{12}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7$
Bestimmen Sie die auf lange Sicht zu erwartende durchschnittliche Anzahl richtiger Antworten von zufällig ankreuzenden Teilnehmern.

(2,5 VP)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Test durch zufälliges Ankreuzen bestanden wird.

Die Wahrscheinlichkeit des Bestehens durch zufälliges Ankreuzen soll unter 1 % liegen.
Wie viele der 12 Fragen müssten dann mindestens für das Bestehen des Tests richtig beantwortet werden?

Man kann die Wahrscheinlichkeit, dass der Test durch zufälliges Ankreuzen bestanden wird, auch durch Erhöhung der Anzahl der Antwortmöglichkeiten reduzieren. Weiterhin soll genau eine Antwortmöglichkeit richtig sein. Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 7 der 12 Fragen richtig anzukreuzen, soll unter 0,5 % liegen.
Bestimmen Sie die dazu bei jeder Frage notwendige Mindestanzahl der Antwortmöglichkeiten.

(4,5 VP)

c) Zum Bestehen sind weiterhin mindestens 7 der 12 Fragen richtig zu beantworten. Man kann sich gezielt auf jede einzelne Frage vorbereiten. Es wird im Folgenden angenommen, dass man jede Frage, auf die man sich vorbereitet, richtig beantwortet. Ein Teilnehmer plant, sich auf einige Fragen vorzubereiten und bei den anderen zufällig eine der drei Antwortmöglichkeiten anzukreuzen. Er möchte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 70 % bestehen.
Auf wie viele Fragen muss er sich dazu mindestens vorbereiten?

(3 VP)

Ein Hersteller produziert Fernsehgeräte. Erfahrungsgemäß haben 12 % der Geräte einen Defekt innerhalb der Garantiezeit von zwei Jahren.

a) Eine Elektronik-Fachmarktkette verkauft 800 dieser Geräte.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Höchstens 100 Geräte haben einen Defekt während der Garantiezeit.
B: Mehr als 90, aber weniger als 120 Geräte haben einen Defekt während der Garantiezeit.

(2 VP)

b) Bleibt ein Gerät während der Garantiezeit ohne Defekt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit 20 %, dass innerhalb der darauffolgenden drei Jahre ein Defekt auftritt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät in den ersten fünf Jahren keinen Defekt aufweist.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten fünf Jahren von 100 Geräten mindestens 70 noch keinen Defekt aufweisen.

(2 VP)

c) Der Hersteller will zum Ende der Garantiezeit eine kostenpflichtige Garantieverlängerung um ein weiteres Jahr anbieten. Er geht davon aus, dass ein Gerät, für das eine solche Verlängerung abgeschlossen wurde, innerhalb dieses weiteren Jahres mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % reklamiert wird.
In diesem Fall entscheidet der Hersteller, was mit dem Gerät geschieht. Dabei kalkuliert er mit den in der folgenden Tabelle dargestellten Wahrscheinlichkeiten und Kosten. Erfahrungsgemäß sind Mehrfachreklamationen so selten, dass sie vernachlässigt werden können.

Entscheidung des Herstellers im Reklamationsfall	Gerät wird ersetzt	Gerät wird repariert	Gerät wird als „grundlos reklamiert“ zurückgesandt
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,5	0,1
Kosten	500 €	240 €	20 €

Wie viel muss die Garantieverlängerung kosten, wenn der Hersteller langfristig einen durchschnittlichen Gewinn von 10 € pro verkaufter Garantieverlängerung erzielen will?

(3 VP)

d) Ein Verbrauchermagazin vermutet, dass die Defektwahrscheinlichkeit größer als 12 % ist und überprüft diese Vermutung mit Hilfe eines Tests. Die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt innerhalb der Garantiezeit liegt bei höchstens 12 %.“ wird mit einem Stichprobenumfang von 250 auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
Geben Sie die zugehörige Irrtumswahrscheinlichkeit an.

(3 VP)

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung an den allgemein bildenden Gymnasien

Prüfungsfach: **M a t h e m a t i k**

Nachtermin 2018 **Lösungshinweise** **Blatt 1 - 11**

Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer
Die Lösungshinweise erheben nicht den Anspruch, die einzigen oder kürzesten Lösungswege aufzuzeigen. Sie sollen unter anderem eine Orientierungshilfe bei der Auswahl der Aufgaben durch die Fachlehrerin oder den Fachlehrer sein. Maßgebend für die Korrektur ist allein der Aufgabentext und jede nach diesem Text mögliche Lösung.

Für jeden Arbeitsauftrag darf maximal die hier ausgewiesene Verrechnungspunktzahl vergeben werden. Diese detaillierte Aufschlüsselung der vergebenen Verrechnungspunkte ist bis zum Abschluss des Verfahrens aufzubewahren.

In die Korrekturformblätter werden nur die erreichten Verrechnungspunktzahlen für die Teilaufgaben eingetragen, so wie sie auf den Aufgabenblättern ausgewiesen sind.

Erst die Endsumme aller erteilten Verrechnungspunkte (max. 60 VP) ist ggf. aufzurunden.

<u>Zum Pflichtteil:</u>

Aufgabe 1

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{-3x} - \frac{3}{x} \cdot e^{-3x}$ (2 VP)

Aufgabe 2

$\pi \cdot \int_1^3 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) dx = \pi \cdot \left[\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)\right]_1^3 = 2 \cdot \left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right) = -4 < -3$ (2,5 VP)

Aufgabe 3

a) $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x = \frac{1}{2}x \cdot \left(x^2 - 4\right)$. Der Ansatz $f'(x) = 0$ führt auf $x_1 = 0$ und $x_{2/3} = \pm 2$, wobei der Abbildung entnommen werden kann, dass x_2 und x_3 die x-Koordinaten der Tiefpunkte sind. Mit $f(2) = 1$ ergeben sich die Tiefpunkte $T_1(-2\,|\,1)$ und $T_2(2\,|\,1)$. (1,5 VP)

b) Für $a = 1$ sowie für $a > 3$ besitzt die Gleichung genau zwei Lösungen. (1 VP)

Aufgabe 4

(1) Die Aussage ist wahr. Die Funktion $F' = f$ hat an der Nullstelle $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel von plus nach minus. (1 VP)

(2) Die Aussage ist wahr. Der Graph von f besitzt in diesem Bereich einen Hochpunkt mit positiver y-Koordinate. Also besitzt der Graph von F an dieser Stelle einen Wendepunkt mit positiver Tangentensteigung. (1 VP)

(3) Die Aussage ist falsch. Es ist $F(2) - F(-1) = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx < 0$, wie man durch Flächenbetrachtung erkennen kann. (1 VP)

Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer

Aufgabe 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$a = 2, b = 3, c = -1$ (3 VP)

Aufgabe 6

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) $g \cap E$ führt auf $5 + t - 2 \cdot (1 + 2t) + 3 \cdot (5 + 3t) = 12$ mit der Lösung $t = -1$.

Wegen $t \notin [0; 1]$ liegen P und Q auf derselben Seite von E. (2 VP)

b) $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, also $R(3 \mid -3 \mid -1)$. (1 VP)

c) Da $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ kein Normalenvektor von E ist, sind g und E nicht orthogonal zueinander.

Deshalb liegen P und R nicht symmetrisch zu E. (1 VP)

Aufgabe 7

a) X kann die Werte 3; 4; 5 und 6 annehmen. (1 VP)

b) $P(X = 4) = P("13") + P("31") + P("22") = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$ (2 VP)

Zum Wahlteil:

Aufgabe A 1.1

a) Geringste Höhe (0,5 VP)

Die geringste Höhe des Seils über dem Boden beträgt 5 m.

Steilste Stelle (1 VP)

Das Seil verläuft am Aufhängepunkt am linken Mast am steilsten.

Abstand der Markierungen (1 VP)

Die Gleichung $f(x) = 6$ hat die Lösungen $x_2 \approx 5{,}07$ und $x_3 \approx 15{,}37$.

Der Abstand der Markierungen beträgt ca. 10,30 m.

Durchschnittliche Höhe (1,5 VP)

$\frac{1}{16}\int_0^{16} f(x)\,dx \approx 6{,}00$ (GTR).

Die durchschnittliche Höhe des Seils über dem Boden beträgt ca. 6 m.

b) Funktionsterm von g (2,5 VP)

Der Ansatz $g(x) = ax^2 + bx + c$ und $g'(x) = 2ax + b$ führt mit den Bedingungen
(1) $g(0) = 9$; (2) $g(10) = 5$ und (3) $g'(10) = 0$ auf das LGS

(1) $c = 9$

(2) $100a + 10b + c = 5$

(3) $20a + b = 0$

mit der Lösung $a = 0{,}04$; $b = -0{,}8$ und $c = 9$ (GTR).
Also ist $g(x) = 0{,}04x^2 - 0{,}8x + 9$.

Höhe am rechten Mast (0,5 VP)

Nach diesem Modell ist das Seil am rechten Mast in einer Höhe von 6,44 m befestigt.

c) Koordinaten des Tiefpunkts (2 VP)

Mit $h_k'(x) = 0{,}08x - k$ führt der Ansatz $h_k'(x) = 0$ auf die Lösung $x_4 = 12{,}5k$.
$h_k(12{,}5k) = 9 - 6{,}25k^2$
Tiefpunkt $T_k\left(12{,}5k \mid 9 - 6{,}25k^2\right)$

Werte von k (1,5 VP)

Der Ansatz $9-6,25k^2=0$ führt auf $k_{1,2}=\pm 1,2$. Da die Parabel mit der Gleichung $y=9-6,25x^2$ nach unten geöffnet ist, liegt der Tiefpunkt T_k für $k<1,2$ oberhalb der x-Achse.

Für $k<1,2$ kann durch den Graphen von h_k der Verlauf des Seils dargestellt werden.

d) Länge des Seils (1 VP)

$$s=\int_0^{16}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\approx 17,15 \quad \text{(GTR)}$$

Die Länge des Seils zwischen den Befestigungspunkten beträgt ca. 17,15 m.

Geringste Höhe mit Gewicht (2,5 VP)

tiefster Punkt des Seils im Modell: $P(8\,|\,p)$. Die Summe der Abstände von P zu den Befestigungspunkten ist gleich der Länge des Seils.

Die Gleichung $17,15=\sqrt{(0-8)^2+(f(0)-p)^2}+\sqrt{(16-8)^2+(f(16)-p)^2}$ hat die Lösungen $p_1\approx 4,83$ und $p_2\approx 10,43$ (GTR). Nur p_1 ist im Sachzusammenhang sinnvoll.

Das Seil hat mit dem Gewicht eine geringste Höhe von ca. 4,83 m über dem Boden.

Aufgabe A 1.2

a) maximaler Flächeninhalt (1,5 VP)

Das Dreieck PQR hat als Grundseite die Strecke PQ. Die zugehörige Höhe wird maximal, wenn R der Hochpunkt des Graphen von f ist, d.h. wenn R die x-Koordinate $\frac{\pi}{2}$ hat.

b) Koordinaten von S (2,5 VP)

Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt: $A_f=\int_0^{\pi} f(x)\,dx=4$ (GTR).

Inhalt des Dreiecks PQS mit $S(x\,|\,f(x))$ $(0\le x\le \pi)$: $A_{PQS}=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot f(x)$.

Die Gleichung $3=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot f(x)$ hat die Lösungen $x_1\approx 1,27$ und $x_2\approx 1,87$. Es ist $f(1,27)\approx 1,91$.

Ein möglicher Punkt ist $S(1,27\,|\,1,91)$.

c) Affine Transformation (2 VP)

Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f durch Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2, Spiegelung an der x-Achse und anschließende Verschiebung um 8 in positive y-Richtung.

Aufgabe A 2.1

a) Weltbevölkerung 2019 (0,5 VP)

Er ist $f(69) \approx 7{,}62$ (GTR).

Die Weltbevölkerung zu Beginn des Jahres 2019 beträgt ca. 7,62 Mrd. Menschen.

Jahr der Verdopplung (1,5 VP)

Der Ansatz $f(t) = 2 \cdot f(0)$ führt auf $t_1 \approx 36{,}38$ (GTR).

Im Jahr 1986 hat sich die Weltbevölkerung gegenüber 1950 verdoppelt.

Stärkster Anstieg (1 VP)

Das Maximum von f' befindet sich an der Stelle $t_2 \approx 45{,}75$ (GTR).

Im Jahr 1995 stieg die Weltbevölkerung am stärksten an.

Langfristiger Wert (1 VP)

Langfristig ist für die Weltbevölkerung ein Wert von 11,6 Mrd. Menschen zu erwarten.

b) 10-Jahres-Zeitraum (2 VP)

Der Ansatz $\frac{1}{10}\int_t^{t+10} f(x)\,dx = 6$ führt auf $t_3 \approx 43{,}22$ (GTR).

Im Zeitraum von 1993 bis 2003 betrug die durchschnittliche Weltbevölkerung 6 Mrd. Menschen.

c) Ermittlung des Bereichs (2 VP)

Wenn w der wirkliche Wert ist, so führt der Ansatz $0{,}9 \le \frac{f(68)}{w} \le 1{,}1$ auf

$\frac{f(68)}{1{,}1} \le w \le \frac{f(68)}{0{,}9}$, also $6{,}86 \le w \le 8{,}39$.

Der wirkliche Wert liegt zwischen 6,86 Mrd. und 8,39 Mrd. Menschen.

Aufgabe A 2.2

a) Inhalt der Teilflächen (2,5 VP)

Der Ansatz $f(x)=0,9$ führt auf $x_1 \approx 0,29$; $x_2 \approx 1,71$ und $x_3 = 4$ (GTR).

$$A = \int_{0,29}^{4} |0,9 - f(x)|\,dx \approx 1,31 \quad \text{(GTR)}.$$

Der Gesamtinhalt der beiden Teilflächen beträgt ca. 1,31 FE.

b) Bestimmung von u (3 VP)

Das Dreieck ABC hat bei C einen rechten Winkel, da die Punkte A und C dieselbe x-Koordinate und die Punkte B und C dieselbe y-Koordinate besitzen. Damit es ein gleichschenkliges Dreieck ist, müssen somit die Seiten AC und BC gleich lang sein.
Der Ansatz $|0,9 - f(u)| = 4 - u$ führt auf $u_1 \approx -1,35$; $u_2 \approx 3,35$ und $u_3 = 4$ (GTR).
Nur u_2 liegt im angegebenen Bereich.
Für $u \approx 3,35$ ist das Dreieck gleichschenklig.

c) Koordinaten eines Punktes Q (3 VP)

Mit dem Punkt $Q(v\,|\,f(v))$ und dem Ansatz $-\frac{1}{f'(v)} = \frac{f(v)-4}{v-0}$ ergeben sich die Lösungen $v_1 \approx 0,73$; $v_2 \approx 3,71$ und $v_3 \approx 4,69$ (GTR).
Ein möglicher Punkt ist $Q(3,71\,|\,0,51)$.

d) Wendepunkte (2 VP)

$f_k'(x) = 3k \cdot x^2 - 12k \cdot x + 1,7$ und $f_k''(x) = 6k \cdot x - 12k$. Der Ansatz $f_k''(x) = 0$ führt auf $x_4 = 2$.
Die Wendepunkte aller Graphen von f_k liegen auf der Geraden mit der Gleichung $x = 2$.

Bestimmung von k (1,5 VP)

Der Ansatz $\sqrt{(2-0)^2 + (f_k(2)-0)^2} = 2,5$ führt auf $k_1 = 0,15$ und $k_2 \approx 0,34$ (GTR).

Aufgabe B 1

a) Rauminhalt des Gartenhauses (1 VP)

$V = 4 \cdot 4 \cdot 2{,}5 + \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1{,}5 = 48$. Das Gartenhaus hat ein Volumen von 48 m^3.

Koordinatengleichung von E (1,5 VP)

$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$; Einsetzen der Koordinaten von C, D und S liefert
$E: 3x_2 + 4x_3 = 22$.

Neigungswinkel der Dachfläche (1 VP)

$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{5}$, somit $\alpha \approx 36{,}9°$

b) Position der Drohne drei Sekunden nach Beobachtungsbeginn (1,5 VP)

Wegen $|\overrightarrow{PQ}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}\right| = 3$ beschreibt der Punkt $R_t\left(7{,}5 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)t \,\middle|\, -4 + 2 \cdot \frac{2}{3}t \,\middle|\, 14 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)t\right)$

die Position der Drohne t Sekunden nach dem Start.
Somit beschreibt $R_3(3{,}5\,|\,0\,|\,12)$ die Position der Drohne drei Sekunden nach dem Start.

Kleinster Abstand zur Spitze des Fahnenmasts (2 VP)

Die Spitze des Masts wird beschrieben durch $S_M(3\,|\,5\,|\,5{,}5)$, die Funktion d mit

$d(t) = |\overrightarrow{S_M R_t}| = \sqrt{\left(7{,}5 - \frac{4}{3}t - 3\right)^2 + \left(-4 + \frac{4}{3}t - 5\right)^2 + \left(14 - \frac{2}{3}t - 5{,}5\right)^2}$ beschreibt den Abstand

der Drohne zur Mastspitze in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t. Der GTR liefert $d_{min} \approx 5{,}79$ als kleinsten Wert von d.
Der kleinste Abstand der Drohne zur Mastspitze beträgt 5,79 m.

c) Höhe der Knickstelle (3 VP)

Beschreibt h die Höhe, in welcher der Mast abgeknickt ist, so beschreibt $K(3\,|\,5\,|\,h)$ mit $0 < h < 5{,}5$ den Punkt, in dem dies geschehen ist.

Es muss gelten $|\overrightarrow{LK}| = |\overrightarrow{S_M K}|$ mit $S_M(3\,|\,5\,|\,5{,}5)$. Dies führt auf die Gleichung

$\sqrt{4 + (h - 3{,}25)^2} = \sqrt{(h - 5{,}5)^2}$ mit der Lösung $h \approx 3{,}49$ (GTR).

Der Mast ist in der Höhe 3,49 m abgeknickt.

Aufgabe B 2

a) Koordinaten von C (0,5 VP)

$C(30\,|\,-12\,|\,16)$

Koordinatengleichung der Ebene K (1,5 VP)

$K: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$; Einsetzen der Koordinaten von $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(30\,|\,0\,|\,0)$ und D liefert $K: 4x_2 + 3x_3 = 0$.

Winkel zwischen Bildschirm und Tastatur (1 VP)

Der Winkel entspricht dem Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AF}$ und $\overrightarrow{AD}$.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\20\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-12\\16\end{pmatrix}}{400} = -\frac{3}{5}\text{, somit } \alpha \approx 126{,}9^\circ \text{ (GTR)}$$

b) Punkt P (1,5 VP)

Hilfsgerade $h: \vec{x} = \overrightarrow{OR} + t\cdot\overrightarrow{n_K} = \begin{pmatrix}10\\40\\50\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$ enthält Punkt R und verläuft senkrecht zu K.

P ist der Schnittpunkt von h mit K: $4\cdot(40+4t)+3\cdot(50+3t)=0 \Leftrightarrow t=-12{,}4$, somit $P(10\,|\,-9{,}6\,|\,12{,}8)$.

Begründung (1 VP)

Die x_1-Koordinate von P liegt zwischen 0 und 30, die x_2-Koordinate von P liegt zwischen -12 und 0, außerdem liegt P in K.

Abstand des Auges zum Bildschirm (0,5 VP)

$|\overrightarrow{RP}| = \sqrt{(10-10)^2+(-9{,}6-40)^2+(12{,}8-50)^2} = 62$ (GTR)

Der Abstand des Auges zum Bildschirm beträgt 62 cm.

c) Begründung für die möglichen Werte von u (1 VP)

Den kleinsten Wert für u erhält man, wenn das Notebook ganz aufgeklappt ist. Da der Bildschirm eine Breite von 20 cm hat, erhält man $u=-20$. Den größten Wert für u erhält man, wenn das Notebook zugeklappt ist. Der Punkt D_u kommt dann auf Punkt F zu liegen und man erhält $u=20$.

Begründung für d_3 (1,5 VP)

Es gilt $|\overrightarrow{D_u A}| = 20$ und $d_3 \geq 0$. Somit gilt

$\sqrt{u^2+{d_3}^2} = 20 \Leftrightarrow u^2+{d_3}^2 = 400 \Leftrightarrow d_3 = \sqrt{400-u^2}$

Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer

Koordinatengleichung der Ebenenschar (1,5 VP)

$E_u: \vec{x} = r \cdot \overrightarrow{OD_u} + s \cdot \overrightarrow{OB} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ \sqrt{400-u^2} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit ist $\overrightarrow{n_u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{400-u^2} \\ -u \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E_u. Da außerdem alle Ebenen der Schar den Ursprung enthalten, ergibt sich als eine Koordinatengleichung $E_u: \sqrt{400-u^2} \cdot x_2 - u \cdot x_3 = 0$.

Aufgabe C 1

a) Alle Fragen falsch beantworten (0,5 VP)

Wahrscheinlichkeit: $\left(\frac{2}{3}\right)^{12} \approx 0{,}008$ (GTR)

Ereignis E (1 VP)

E: "Von den 12 Fragen werden genau 7 Fragen richtig beantwortet."

Zu erwartende durchschnittliche Anzahl richtiger Antworten (1 VP)

X: Anzahl der richtigen Antworten, X ist binomialverteilt mit $n = 12$ und $p = \frac{1}{3}$.

$E(X) = n \cdot p = 4$. Es sind auf lange Sicht durchschnittlich 4 richtige Antworten zu erwarten.

b) Wahrscheinlichkeit für zufälliges Bestehen (1 VP)

X: Anzahl der richtigen Antworten, X ist binomialverteilt mit $n = 12$ und $p = \frac{1}{3}$.

$P(X \geq 7) \approx 0{,}066$ (GTR)

Veränderung der Grenze zum Bestehen (1,5 VP)

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl k mit $P(X \geq k) < 0{,}01$.

Es ist $P(X \geq 8) \approx 0{,}019 > 0{,}01$ und $P(X \geq 9) \approx 0{,}004 < 0{,}01$ (GTR).

Es müssten dann mindestens 9 Fragen richtig beantwortet werden.

Mindestanzahl der Antwortmöglichkeiten (2 VP)

Sind a die Anzahl der Antwortmöglichkeiten und Y die Anzahl der richtigen Antworten, so ist Y binomialverteilt mit $n = 12$ und $p = \frac{1}{a}$. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl a mit $P(Y \geq 7) < 0{,}005$.

Für $a = 4$ liefert der GTR $P(Y \geq 7) \approx 0{,}014 > 0{,}005$ und für $a = 5$ entsprechend $P(Y \geq 7) \approx 0{,}004 < 0{,}005$

Man müsste bei jeder Frage mindestens fünf Antwortmöglichkeiten vorgeben.

c) Mindestanzahl der vorbereiteten Fragen (3 VP)

Ist v die Anzahl der Fragen, auf die man sich vorbereitet hat und beschreibt Z die Anzahl der zufällig richtig angekreuzten restlichen Antworten, so ist Z binomialverteilt mit $n = 12 - v$ und $p = \frac{1}{3}$. Gesucht ist die kleinste Zahl v mit $P(Z \geq 7 - v) \geq 0{,}7$.

Für $v = 4$ liefert der GTR $P(Z \geq 3) \approx 0{,}532 < 0{,}7$ und für $v = 5$ entsprechend $P(Z \geq 2) \approx 0{,}737 > 0{,}7$.

Der Teilnehmer muss sich auf mindestens fünf Fragen vorbereiten.

Aufgabe C 2

a) Ereignis A (1 VP)

X_1 : Anzahl der Geräte mit defekt innerhalb der Garantiezeit, X_1 ist binomialverteilt mit $n = 800$ und $p = 0{,}12$.

$P(X_1 \leq 100) \approx 0{,}691$ (GTR)

Ereignis B (1 VP)

$P(90 < X_1 < 120) = P(X_1 \leq 119) - P(X_1 \leq 90) \approx 0{,}716$ (GTR)

b) Kein Defekt in den ersten 5 Jahren (1 VP)

$P(\text{"kein Defekt in den ersten 2 Jahren"}) \cdot P(\text{"kein Defekt in den darauffolgenden 3 Jahren"})$
$= (1 - 0{,}12) \cdot (1 - 0{,}2) = 0{,}704$

Mindestens 70 von 100 Geräten in den ersten 5 Jahren defektfrei (1 VP)

X_2 : Anzahl der 5 Jahre lang defektfreien Geräte, X_2 ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}704$.

$P(X_2 \geq 70) \approx 0{,}584$ (GTR)

c) Preis der Garantieverlängerung (3 VP)

Beschreibt a den Preis der Garantieverlängerung in Euro und X_3 den Gewinn pro verkaufter Garantieverlängerung in Euro, so gilt:

$E(X_3) = a - 0{,}15 \cdot (0{,}4 \cdot 500 + 0{,}5 \cdot 240 + 0{,}1 \cdot 20) = a - 48{,}3$. Aus der Bedingung $E(X_3) = 10$ folgt $a = 58{,}3$.

Die Garantieverlängerung muss 58,30 € kosten.

d) Entscheidungsregel (2,5 VP)

X_4 : Anzahl der defekten Geräte innerhalb der Garantiezeit

$H_0 : p \leq 0{,}12$, $H_1 : p > 0{,}12$, rechtsseitiger Test

Trifft H_0 zu, so ist X_4 im Extremfall binomialverteilt mit $n = 250$ und $p = 0{,}12$.

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl k mit $P(X_4 \geq k) \leq 0{,}05$.

Es ist $P(X_4 \geq 39) \approx 0{,}053 > 0{,}05$ und $P(X_4 \geq 40) \approx 0{,}036 < 0{,}05$ (GTR).

Entscheidungsregel:

Treten bei mindestens 40 Geräten innerhalb des Garantiezeitraums Defekte auf, so wird die Nullhypothese verworfen, ansonsten kann sie nicht verworfen werden.

Zugehörige Irrtumswahrscheinlichkeit (0,5 VP)

Die zugehörige Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt 3,6%.

