MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Abiturprüfung an den allgemein bildenden Gymnasien

Prüfungsfach: **M a t h e m a t i k**

Nachtermin 2017 **Pflichtteil** **Blatt 1 - 2**

Aufgabe 1

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (x^3 + 2) \cdot \cos(x)$.

(1,5 VP)

Aufgabe 2

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Wert des Integrals $\int_1^{e^2} \frac{4}{x}\,dx$ größer als 7 ist.

(2 VP)

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $\cos(x) \cdot \sin(x) + 3 \cdot \sin(x) = 0$ für $0 \le x \le 2\pi$.

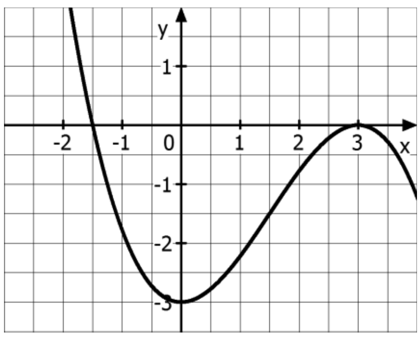
(2,5 VP)

Aufgabe 4

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.

F ist eine Stammfunktion, f' ist die Ableitungsfunktion von f.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.



(1) Der Graph von F hat bei $x = 3$ einen Tiefpunkt.

(2) Der Graph von F hat auf der y-Achse einen Wendepunkt.

(3) $\int_0^3 f'(x)\,dx = -3$

(4) Es gibt eine Stammfunktion G von f mit $G(-1) = G(2)$.

(4 VP)

Aufgabe 5

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 6 \end{array}$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

(3 VP)

Aufgabe 6

Gegeben sind der Punkt $P(-2\,|\,3\,|\,0)$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie den Abstand von P zu g.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte, die vom Ursprung jeweils doppelt so weit entfernt sind wie von P.

(4,5 VP)

Aufgabe 7

Für ein Gewinnspiel mit einem Glücksrad sind in der Tabelle die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse und die zugehörigen Gewinne angegeben.

Farbe	blau	grün	rot
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,1	0,5
Gewinn bei einmaligem Drehen (in €)	g	2	–1

a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass bei dreimaligem Drehen jede Farbe genau einmal erscheint.
Entscheiden Sie, ob $p = 3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5$ gilt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Bestimmen Sie den Gewinn g für das Ergebnis „blau“ so, dass sich bei einmaligem Drehen ein faires Spiel ergibt.

(2,5 VP)

Aufgabe A 1.1

Ein Getränk wird aus dem Kühlschrank genommen und an einen warmen Ort gestellt.
Die Temperatur des Getränks wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 25 - 19 \cdot e^{-0{,}045 \cdot t}$$

(t in Minuten nach der Entnahme aus dem Kühlschrank, f(t) in °C).

a) Um wieviel Grad erwärmt sich das Getränk in den ersten 5 Minuten nach Entnahme aus dem Kühlschrank?
Bestimmen Sie einen Zeitraum, in dem die Temperatur um 10 Grad zunimmt.
Bestimmen Sie die mittlere Temperatur innerhalb der ersten halben Stunde nach Entnahme aus dem Kühlschrank.
Zu welchem Zeitpunkt beträgt die momentane Änderungsrate der Temperatur 0,5 Grad pro Minute?
Geben Sie die maximale momentane Änderungsrate der Temperatur in der ersten Stunde nach Entnahme aus dem Kühlschrank an.

(6 VP)

Ein anderes Getränk wird aus dem Kühlschrank direkt in die Sonne gestellt.
Seine Temperatur kann beschrieben werden durch die Funktion g mit

$$g(t) = 40 - e^{-q \cdot t + r}$$

(t in Minuten nach der Entnahme aus dem Kühlschrank, g(t) in °C).

b) Das Getränk erwärmt sich in den ersten 15 Minuten nach der Entnahme aus dem Kühlschrank von 6 °C auf 23 °C.
Berechnen Sie die Werte von r und q.
Bestimmen Sie die Temperatur, die das Getränk langfristig annimmt.
Weisen Sie nach, dass g eine Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums erfüllt.
(Teilergebnis: $g(t) = 40 - e^{-0{,}046 \cdot t + 3{,}526}$)

(5 VP)

c) Betrachtet wird die Funktion h mit $h(t) = t + 6$ als Näherung für g.
Bestimmen Sie alle Zeiträume innerhalb der ersten halben Stunde nach Entnahme, in denen die durch h gegebenen Werte von den tatsächlichen Temperaturwerten um höchstens 5 % abweichen.

(4 VP)

Aufgabe A 1.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$.

Der Graph von f schließt mit der x-Achse eine Fläche A ein.

a) Die y-Achse teilt diese Fläche in zwei Teile.
Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte beider Teile.

(2,5 VP)

b) Die Geraden g und h sind parallel zur y-Achse und haben voneinander den Abstand 1. Sie begrenzen innerhalb der Fläche A eine Teilfläche B mit dem Inhalt 0,6.
Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Geraden g und h.

(2,5 VP)

Aufgabe A 2.1

Die Konzentration eines Stoffes, welcher bei einer chemischen Reaktion gewonnen wird, kann durch die Funktion f beschrieben werden mit

$$f(t) = 750 \cdot \left(e^{-0{,}5 \cdot t} - e^{-t}\right) \quad ; \quad 0 \le t \le 10$$

(Zeit t in Minuten, Konzentration $f(t)$ in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$).

a) Bestimmen Sie die maximale Konzentration.
Zu welchen Zeitpunkten beträgt die Konzentration 130 $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$?
Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Abnahme der Konzentration am größten ist.
Bestimmen Sie die mittlere Konzentration innerhalb der ersten 5 Minuten.

(4,5 VP)

b) Tatsächlich hängt die Konzentration auch von der Temperatur ab und wird beschrieben durch

$$f_a(t) = 15 \cdot a \cdot \left(e^{-\frac{1}{100} \cdot a \cdot t} - e^{-\frac{1}{50} \cdot a \cdot t}\right) \quad ; \quad t \ge 0; \quad 0 < a < 100$$

(Temperatur a in °C; Zeit t in Minuten, Konzentration $f_a(t)$ in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$).

Berechnen Sie die Konzentration des Stoffes nach einer Minute bei einer Temperatur von 40 °C.
Bei welcher höheren Temperatur erhält man diese Konzentration bereits nach 45 Sekunden?

(3 VP)

Aufgabe A 2.2

Der Graph einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades besitzt den Extrempunkt $E\left(-2 \mid \frac{9}{2}\right)$ und den Wendepunkt $W\left(-1 \mid \frac{7}{2}\right)$.

a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Graph von g genau zwei Extrempunkte besitzt und E ein Hochpunkt ist.
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von g.
(Teilergebnis: $g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}$)

(5 VP)

b) Für $u>0$ begrenzt der Graph von g mit den Koordinatenachsen und der Geraden $x=u$ eine Fläche des Inhalts 20.
Berechnen Sie den Wert von u.

(1,5 VP)

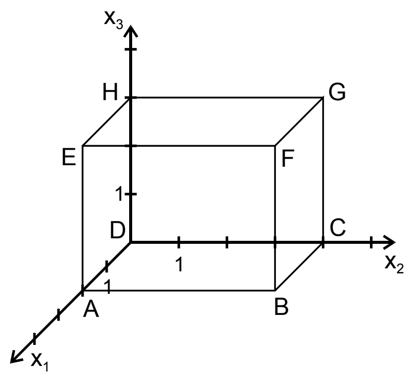
c) Die Funktion h ist gegeben durch $h(x)=-g(x+3)+4$.
Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen von g hervorgeht.

(2 VP)

d) Untersuchen Sie, ob die Gerade mit der Gleichung $y=\frac{9}{2}\cdot x$ den Graphen von g berührt.
Geben Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung $g(x)=k\cdot x$, in Abhängigkeit von k $(k \in \mathbb{R})$ an.

(4 VP)

In einem Koordinatensystem ist ein Quader gegeben, dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.
Dabei sind $D(0\,|\,0\,|\,0)$ und $F(2\,|\,4\,|\,3)$ Eckpunkte des Quaders.



a) Die Ebene K enthält die Punkte B, C, E und H.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene K.
Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Ebene K die x_1x_2-Ebene schneidet.
Berechnen Sie den Abstand des Punktes G von der Ebene K.
(Teilergebnis: $K: 3x_2 + 4x_3 = 12$)

(3,5 VP)

b) Der Punkt P* entsteht durch Spiegelung des Punktes $P(0{,}5\,|\,1\,|\,0)$ an der Ebene K.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob P* innerhalb des Quaders liegt.

(2,5 VP)

c) Die Ebene $L: 3x_2 + 4x_3 = 16$ schneidet den Quader.
Berechnen Sie den Inhalt der entstehenden Schnittfläche.

Die Ebenen K und L gehören zu der Ebenenschar $E_d: 3x_2 + 4x_3 = d\ (d \in \mathbb{R})$.
Für welche Werte von d haben der Quader und E_d keine gemeinsamen Punkte?

(4 VP)

Auf einem Tisch steht eine gefaltete, 20 cm hohe Karte (siehe Abbildung). Sämtliche Kanten der Karte verlaufen entweder senkrecht oder parallel zur Tischfläche.
In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $A(0|0|0)$, $B(80|0|0)$, $C(80|180|0)$ und $D(0|180|0)$ die Ecken des Tisches, die Punkte $P(20|145|0)$, $Q(8|140|0)$ und $R(20|135|0)$ Ecken der Karte dar (Koordinatenangaben in cm).

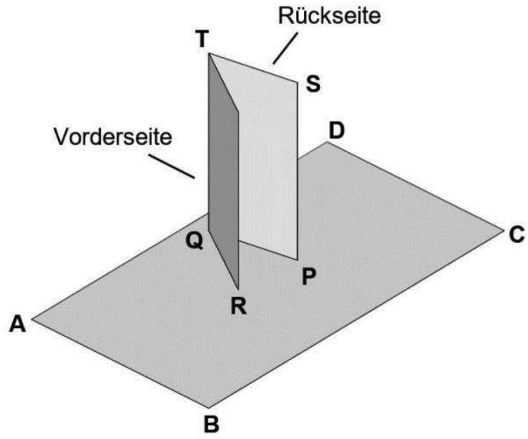


Abbildung nicht maßstäblich

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR gleichschenklig ist.
Es gibt einen Punkt N, für den das Viereck NPQR eine Raute ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten von N.
1 cm^2 des Papiers, aus dem die Karte gefertigt ist, wiegt 16 mg.
Wie viel wiegt die Karte?
Die Punkte P, Q, S und T liegen in der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.
(Teilergebnis: $E: -5x_1 + 12x_2 = 1640$)

(4,5 VP)

Der Punkt $L(8|130|30)$ beschreibt die Position einer punktförmigen Lichtquelle.

b) Die Kante der Karte, die durch die Strecke ST dargestellt wird, wirft eine Schattenlinie, die vollständig auf der Tischplatte liegt.
Berechnen Sie die Länge dieser Schattenlinie.

(3 VP)

c) Ausgehend von L kann die Position der Lichtquelle parallel zur Tischkante, die durch die Strecke AD beschrieben wird, verschoben werden; die neue Position der Lichtquelle wird durch L' beschrieben. Dabei soll der Winkel, der von den Strecken $L'S$ und SP eingeschlossen wird, eine Weite von 120° haben.
Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkte, welche jeweils eine mögliche neue Position der Lichtquelle beschreiben.

(2,5 VP)

Ein Süßwarenhersteller produziert verschiedenfarbige Fruchtgummischlangen. Von jeder Farbe wird ein immer gleichbleibender Anteil produziert. Der Anteil der roten Schlangen beträgt 10 %. Jeweils 10 Fruchtgummischlangen werden in eine Tüte verpackt. Die Verteilung der Schlangen auf die Tüten erfolgt zufällig.

a) Kim kauft fünf Tüten und öffnet diese nacheinander.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: In den fünf Tüten sind insgesamt genau acht rote Schlangen enthalten.
B: In der ersten Tüte befindet sich mindestens eine rote Schlange.
C: Nur in der letzten geöffneten Tüte befindet sich mindestens eine rote Schlange.
D: In genau zwei der fünf Tüten befinden sich jeweils mindestens zwei rote Schlangen.

(5,5 VP)

b) Robert möchte, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine rote Schlange zu erhalten, mindestens 98 % beträgt.
Wie viele Tüten muss er dazu mindestens kaufen?

(2 VP)

c) Lea kauft 200 Fruchtgummischlangen und schlägt Paul ein Spiel vor: Paul darf mit verbundenen Augen zwei Schlangen ziehen und behalten. Wenn darunter mindestens eine grüne ist, erhält er alle Schlangen, andernfalls muss er Lea zwei Euro bezahlen.
Für welche Anzahlen grüner Schlangen erhält Lea mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % zwei Euro?

(2,5 VP)

Bei einer verbeulten Münze beträgt die Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ 62 % und für „Zahl“ 38 %.

a) Die Münze wird dreißig Mal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Man erhält genau zwanzig Mal „Wappen“.
B: Man erhält häufiger „Wappen“ als „Zahl“.
C: Man erhält mehr als dreizehn Mal „Wappen“, aber die ersten drei Würfe zeigen „Zahl“.

(4 VP)

b) Wie oft darf man die Münze höchstens werfen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 20 % mehr als zehnmal „Zahl“ erhält?

(2 VP)

c) Bei einer anderen verbeulten Münze wird vermutet, dass man „Wappen“ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 70 % erhält. Deshalb soll ein Test auf einem Signifikanzniveau von 5 % mit einem Stichprobenumfang von 200 durchgeführt werden. Als Nullhypothese wird die Vermutung verwendet.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Tatsächlich beträgt die Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ sogar 72 %.

Wie groß ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in obigem Test die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird?

(4 VP)

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung an den allgemein bildenden Gymnasien

Prüfungsfach: **M a t h e m a t i k**

Nachtermin 2017 **Lösungshinweise** **Blatt 1 - 10**

Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer
Die Lösungshinweise erheben nicht den Anspruch, die einzigen oder kürzesten Lösungswege aufzuzeigen.
Sie sollen unter anderem eine Orientierungshilfe bei der Auswahl der Aufgaben durch die Fachlehrerin oder den Fachlehrer sein. Maßgebend für die Korrektur ist allein der Aufgabentext und jede nach diesem Text mögliche Lösung.

Für jeden Arbeitsauftrag darf maximal die hier ausgewiesene Verrechnungspunktzahl vergeben werden; diese detaillierte Aufschlüsselung der vergebenen Verrechnungspunkte ist bis zum Abschluss des Verfahrens aufzubewahren.

In die Korrekturformblätter werden nur die erreichten Verrechnungspunktzahlen für die Teilaufgaben eingetragen, so wie sie auf den Aufgabenblättern ausgewiesen sind.

Erst die Endsumme aller erteilten Verrechnungspunkte (max. 60 VP) ist ggf. aufzurunden.

<u>Zum Pflichtteil:</u>

Aufgabe 1

$f'(x)=3x^2\cdot\cos(x)-(x^3+2)\cdot\sin(x)$ (1,5 VP)

Aufgabe 2

$\int_1^{e^2}\frac{4}{x}dx=\left[4\cdot\ln(x)\right]_1^{e^2}=4\cdot2-4\cdot0=8$. Somit ist der Wert des Integrals größer als 7. (2 VP)

Aufgabe 3

Ausklammern ergibt $\sin(x)\cdot\left(\cos(x)+3\right)=0$. Wegen $\cos(x)\neq-3$ gilt das genau dann, wenn $\sin(x)=0$. Damit ergeben sich die Lösungen $x_1=0$, $x_2=\pi$ und $x_3=2\pi$.

Aufgabe 4

(1) Die Aussage ist falsch. Die Funktion f hat an der Stelle $x=3$ keinen Vorzeichenwechsel, somit besitzt der Graph von F an dieser Stelle keinen Extrempunkt. (1 VP)

(2) Die Aussage ist richtig, denn die Funktion f besitzt die Extremstelle $x=0$. (1 VP)

(3) Die Aussage ist falsch. $\int_0^3 f'(x)dx=f(3)-f(0)=0-(-3)=3\neq-3$. (1 VP)

(4) Die Aussage ist falsch. Im Intervall $[-1;2]$ ist f(x)<0 und somit gilt $G(-1)>G(2)$. (1 VP)

Aufgabe 5

$L = \{(5t-18, t, 2t-6), t \in \mathbb{R}\}$ (2 VP)

Das Gleichungssystem stellt drei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ dar, die Lösungmenge stellt die Punkte der gemeinsamen Schnittgerade der Ebenen dar. (1 VP)

Aufgabe 6

a) Der Ansatz $\left[\begin{pmatrix}3\\9\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} = 0$ liefert $t = -2$.

Als Abstand ergibt sich somit $\left|\begin{pmatrix}3\\9\\4\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right| = 3$. (2,5 VP)

b) beispielsweise $\overrightarrow{OQ} = 2\cdot\overrightarrow{OP}$,somit $Q(-4\,|\,6\,|\,0)$ und $\overrightarrow{OR} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{OP}$, somit $R(-\frac{4}{3}\,|\,2\,|\,0)$ (2 VP)

Aufgabe 7

a) Es gilt nicht $p = 3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}5$, da es nicht drei, sondern sechs mögliche Reihenfolgen des Auftretens dreier verschiedener Farben gibt. (1 VP)

b) Die Zufallsvariable X beschreibt den Gewinn in € bei einmaligem Drehen.
Der Erwartungswert von X ist $E(X) = 0{,}4\cdot g + 0{,}1\cdot 2 - 0{,}5\cdot 1$.
Das Spiel ist genau dann fair, wenn $E(X) = 0$ gilt, woraus sich $g = 0{,}75$ ergibt. (1,5 VP)

Zum Wahlteil:

Aufgabe A 1.1

a) Erwärmung in den ersten 5 Minuten (1,5 VP)

$f(5)-f(0)\approx 3{,}8$ (GTR)

Das Getränk erwärmt sich in den ersten 5 Minuten um ca. 3,8 Grad.

Zeitraum (1 VP)

Einen möglichen Zeitraum erhält man wegen $f(0)=6$ durch den Ansatz $f(t)=16$.
Dies führt auf $t_1\approx 16{,}60$ (GTR).

In den ersten 16,6 Minuten nach Entnahme aus dem Kühlschrank nimmt die Temperatur um 10 Grad zu.

Mittlere Temperatur (1,5 VP)

$\frac{1}{30}\int_0^{30} f(t)\,dt \approx 14{,}6$ (GTR)

Die mittlere Temperatur innerhalb der ersten halben Stunde beträgt ca. 14,6 °C.

Zeitpunkt (1 VP)

$f'(t)=0{,}5$ liefert $t_2\approx 11{,}9$ (GTR).

Nach ca. 11,9 Minuten beträgt die momentane Änderungsrate der Temperatur 0,5 Grad pro Minute.

Maximale momentane Änderungsrate (1 VP)

Die maximale momentane Änderungsrate der Temperatur beträgt ca. 0,86 Grad pro Minute.

b) Bestimmung von r und q (2 VP)

Aus $g(0)=6$ folgt $40-e^{r}=6$ und daraus $r\approx 3{,}526$ (GTR). Der Ansatz $g(15)=23$ führt auf $40-e^{-15q+3{,}526}=23$ mit der Lösung $q\approx 0{,}046$ (GTR).

Temperatur, die das Getränk langfristig annimmt (1 VP)

Für $t\to\infty$ gilt $e^{-0{,}046\cdot t+3{,}526}\to 0$ und damit $g(t)\to 40$.

Langfristig nimmt das Getränk eine Temperatur von 40 °C an.

Differenzialgleichung (2 VP)

Es ist $g'(t)=0{,}046\cdot e^{-0{,}046\cdot t+3{,}256}$ und $40-g(t)=e^{-0{,}046\cdot t+3{,}526}$.
Also gilt $g'(t)=0{,}046\cdot(40-g(t))$.

Somit erfüllt g eine Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums.

c) Abweichung der Näherung (4 VP)

Eine Abweichung von 5 % zur tatsächlichen Temperatur führt auf den Ansatz

$0{,}95 \le \frac{h(t)}{g(t)} \le 1{,}05,\ 0 \le t \le 30$.

Mit dem GTR erhält man als Lösungen die Intervalle $[0\,;\,0{,}62]$ und $[17{,}69\,;\,24{,}37]$.

Im Zeitraum von der Entnahme bis 0,62 Minuten nach Entnahme sowie im Zeitraum 17,69 Minuten bis 24,37 Minuten nach Entnahme weichen die Funktionswerte von h um höchstens 5 % von den tatsächlichen Temperaturwerten ab.

Aufgabe A 1.2

a) Verhältnis der Flächeninhalte (2,5 VP)

Die Nullstellen von f sind $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ (GTR).

$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = 2$ und $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{4}$ (GTR).

Das Verhältnis der Flächeninhalte beider Teile beträgt 8 : 1.

b) Gleichung von g und h (2,5 VP)

Die Geraden haben die Gleichungen $x = c$ und $x = c+1$ für eine Zahl c mit $-2 \le c \le 0$.

Der Ansatz $\int_{c}^{c+1} f(x)\,dx = 0{,}6$ führt auf $c_1 \approx -2{,}19$, $c_2 \approx -0{,}43$ und $c_3 \approx 1{,}12$ (GTR).

Nur die Lösung c_2 liegt im angegebenen Bereich.

Die Geraden haben die Gleichungen $x = -0{,}43$ und $x = 0{,}57$.

Aufgabe A 2.1

a) Maximale Konzentration (1 VP)

$f_{max} = 187{,}5$ (GTR)

Die maximale Konzentration des Stoffes beträgt 187,5 $\frac{mg}{l}$.

Zeitpunkte (1 VP)

Der Ansatz $f(t) = 130$ führt auf $t_1 \approx 0{,}50$ und $t_2 \approx 3{,}00$ (GTR).

Nach ca. 0,5 Minuten und nach ca. 3,0 Minuten beträgt die Konzentration 130 $\frac{mg}{l}$.

Zeitpunkt mit maximaler Abnahme (1 VP)

Das Minimum von f' ist bei $t_3 \approx 2{,}77$ (GTR).

Nach ca. 2,8 Minuten ist die Abnahme der Konzentration am größten.

Mittlere Konzentration (1,5 VP)

$\frac{1}{5}\int_0^5 f(t)\,dt \approx 126{,}4$ (GTR)

Die mittlere Konzentration innerhalb der ersten 5 Minuten beträgt ca. 126,4 $\frac{mg}{l}$.

b) Konzentration nach einer Minute bei 40 °C (1 VP)

$f_{40}(1) \approx 132{,}6$ (GTR)

Die Konzentration des Stoffes nach einer Minute bei 40 °C beträgt ca. 132,6 $\frac{mg}{l}$.

Höhere Temperatur für früheres Erreichen der Konzentration (2 VP)

Der Ansatz $f_a(0{,}75) = 132{,}6$ führt auf die Gleichung $15 \cdot a \cdot \left(e^{-\frac{1}{100} \cdot a \cdot 0{,}75} - e^{-\frac{1}{50} \cdot a \cdot 0{,}75}\right) = 132{,}6$.

Diese hat die Lösungen $a_1 \approx -29{,}1$, $a_2 \approx 43{,}8$ und $a_3 \approx 548{,}1$ (GTR).
Nur a_2 liegt im relevanten Bereich.
Bei einer Temperatur von ca. 43,8 °C erhält man die obige Konzentration bereits nach 45 Sekunden.

Aufgabe A 2.2

a) Begründung (2 VP)

Die Funktion g' ist eine ganzrationale Funktion zweiten Grades. Da diese bei $x=-2$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat, muss sie genau eine weitere Nullstelle mit Vorzeichenwechsel haben, also besitzt der Graph von g genau zwei Extrempunkte.
Die Wendestelle liegt zwischen den beiden Extremstellen. Da die y-Koordinate von E größer als die von W ist, muss E ein Hochpunkt sein.

Bestimmung der Funktionsgleichung (3 VP)

Die Bedingungen $g(-2)=\frac{9}{2}$, $g(-1)=\frac{7}{2}$, $g'(-2)=0$ und $g''(-1)=0$ führen auf $g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}$ (GTR).

b) Berechnung von u (1,5 VP)

Der Ansatz $\int_0^u g(x)\,dx=20$ führt auf $u_1\approx-5{,}57$ und $u_2\approx2{,}55$ (GTR). Nur u_2 ist positiv.
Der gesuchte Wert beträgt ca. 2,55.

c) Beschreibung (2 VP)

Der Graph von h entsteht aus dem von g, indem man diesen an der x-Achse spiegelt und um 3 LE in negative x-Richtung und anschließend um 4 LE in positive y-Richtung verschiebt.

d) Berühren (2 VP)

Der Ansatz $g(x)=\frac{9}{2}x$ liefert $x_1=-5$ und $x_2=1$. Außerdem ist $g'(1)=\frac{9}{2}$ (GTR).
Also berührt die Gerade den Graphen von g.

Anzahl der Lösungen (2 VP)

Aus den Graphen erkennt man: Für $k<\frac{9}{2}$ hat die Gleichung genau eine Lösung, für $k=\frac{9}{2}$ hat sie zwei Lösungen und für $k>\frac{9}{2}$ hat sie drei Lösungen.

Aufgabe B 1

a) Koordinatengleichung der Ebene K (1,5 VP)

Ansatz: $K: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$. Durch Punktproben mit den Punkten $B(2|4|0)$, $C(0|4|0)$ und $H(0|0|3)$ ergibt sich $a = 0$, $b = \frac{1}{4}d$ und $c = \frac{1}{3}d$ und somit beispielsweise $K: 3x_2 + 4x_3 = 12$.

Winkel (1 VP)

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|},\quad \alpha \approx 36{,}9^\circ \text{ (GTR)}$$

Abstand (1 VP)

$$G(0|4|3),\ d(G,K) = \frac{|3\cdot 4 + 4\cdot 3 - 12|}{5} = 2{,}4$$

b) Untersuchung, ob P* im Quader liegt (2,5 VP)

Hilfsgerade $h: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\cdot\vec{n}_K = \begin{pmatrix}0{,}5\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$. Schnitt mit der Ebene K führt zur Gleichung

$3\cdot(1+3t) + 4\cdot 4t = 12$ mit der Lösung $t = 0{,}36$. Also gilt $\overrightarrow{OP^*} = \begin{pmatrix}0{,}5\\1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot 0{,}36\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\3{,}16\\2{,}88\end{pmatrix}$.

Alle drei Koordinaten liegen zwischen den entsprechenden Koordinaten der Punkte D und F. Der Punkt P* liegt also im Quader.

c) Inhalt der Schnittfläche (2 VP)

Da L parallel zur Kante FG liegt, handelt es sich bei der Schnittfigur um ein Rechteck mit der Breite $b = \left|\overrightarrow{FG}\right| = 2$. S_1 und S_2 sind die Eckpunkte des Rechtecks auf den Kanten HG und CG.
Schnitt von L mit der Ebene $x_3 = 3$ führt zu $x_2 = \frac{4}{3}$. Daraus ergibt sich $S_1(0|\frac{4}{3}|3)$.
Entsprechend führt der Schnitt von L mit der Ebene $x_2 = 4$ zu $x_3 = 1$ und zu $S_2(0|4|1)$.
Als Flächeninhalt ergibt sich $A_{Rechteck} = 2\cdot\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right| = 2\cdot\sqrt{\left(4-\frac{4}{3}\right)^2 + (1-3)^2} = \frac{20}{3}$ (GTR).

Keine gemeinsamen Punkte (2 VP)

Extreme Lagen von E_d mit gemeinsamen Punkten mit dem Quader ergeben sich, wenn $D \in E_d$ und somit $d = 0$ oder wenn $F \in E_d$ und somit $d = 24$ gilt.
Für $d < 0$ und $d > 24$ haben der Quader und E_d keine gemeinsamen Punkte.

Aufgabe B 2

a) Nachweis der Gleichschenkligkeit (1 VP)

$\left|\overrightarrow{QR}\right| = \left|\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 13$, $\left|\overrightarrow{QP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 13$. Somit ist das Dreieck PQR gleichschenklig.

Koordinaten von N (1 VP)

Mit $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 32 \\ 140 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält man $N(32\,|\,140\,|\,0)$.

Masse der Karte (1 VP)

$M_{Karte} = 16 \cdot 2 \cdot \left|\overrightarrow{QR}\right| \cdot 20 = 16 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 20 = 8320$ (GTR)

Die Karte wiegt etwa 8,3 g.

Koordinatengleichung der Ebene E (1,5 VP)

Ansatz: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$. Durch Punktproben mit den Punkten P, Q und $S(20\,|\,145\,|\,20)$ ergibt sich $a = -\frac{1}{328}d$, $b = \frac{3}{410}d$ und $c = 0$ und somit beispielsweise $E: -5x_1 + 12x_2 = 1640$.

b) Länge der Schattenlinie (3 VP)

Der Lichtstrahl durch L und $T(8\,|\,140\,|\,20)$ liegt auf $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 130 \\ 30 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$. Schnitt von g mit der x_1x_2-Ebene führt auf $t = 3$ und $T'(8\,|\,160\,|\,0)$ als Schattenpunkt von T.
Analog erhält man $S'(44\,|\,175\,|\,0)$ als Schattenpunkt von $S(20\,|\,145\,|\,20)$.

$\left|\overrightarrow{T'S'}\right| = \sqrt{36^2 + 15^2} = 39$. Die Länge der Schattenlinie beträgt 39 cm.

c) Neue Positionen der Lichtquelle (2,5 VP)

Wegen der Verschiebung parallel zu AD ist $L'(8\,|\,a\,|\,30)$ die neue Position.

Es ist $\overrightarrow{SL'} = \begin{pmatrix} -12 \\ a-145 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}$.

Es muss gelten: $\dfrac{\overrightarrow{SL'} \cdot \overrightarrow{SP}}{\left|\overrightarrow{SL'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SP}\right|} = \dfrac{-200}{20 \cdot \sqrt{(-12)^2 + (a-145)^2 + 10^2}} = \cos(120°)$

Mit dem GTR erhält man die Lösungen $a_1 \approx 132{,}5$ und $a_2 \approx 157{,}5$.
$L_1'(8\,|\,132{,}5\,|\,30)$ und $L_2'(8\,|\,157{,}5\,|\,30)$ sind die möglichen neuen Positionen der Lichtquelle.

Aufgabe C 1

a) Ereignis A (1 VP)

X_A : Gesamtzahl der roten Schlangen in fünf Tüten

X_A ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0{,}1$.

$P(A) = P(X_A = 8) \approx 0{,}064$ (GTR)

Ereignis B (1 VP)

X_B : Anzahl der roten Schlangen in einer Tüte

X_B ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}1$.

$P(B) = 1 - P(X_B = 0) \approx 0{,}651$ (GTR)

Ereignis C (1,5 VP)

$P(C) = \left(0{,}9^{10}\right)^4 \cdot P(B) \approx 0{,}010$ (GTR)

Ereignis D (2 VP)

X_D : Anzahl der Tüten, die mindestens zwei rote Schlangen enthalten

X_D ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = P(X_B \geq 2) \approx 0{,}264$.

$P(D) = P(X_D = 2) \approx 0{,}278$ (GTR)

b) Mindestanzahl der Tüten (2 VP)

Y: Gesamtzahl der roten Schlangen in allen gekauften Tüten
Y ist binomialverteilt mit unbekanntem Parameter n und $p = 0{,}1$.

Gesucht ist die kleinste durch 10 teilbare Zahl n mit $P(Y \geq 1) \geq 0{,}98$.

Für $n = 30$ erhält man $P(Y \geq 1) \approx 0{,}958$, für $n = 40$ erhält man $P(Y \geq 1) \approx 0{,}985$ (GTR).

Robert muss mindestens vier Tüten kaufen.

c) Anzahlen der grünen Schlangen (2,5 VP)

Lea erhält zwei Euro, wenn keine der Schlangen grün ist.

Bezeichnen Z die Anzahl der gezogenen grünen Schlangen und g die Gesamtzahl der grünen Schlangen, so ist $P(\text{"Lea erhält zwei Euro"}) = P(Z = 0) = \frac{200 - g}{200} \cdot \frac{199 - g}{199}$.

Für $g = 21$ erhält man $P(Z = 0) \approx 0{,}801 > 0{,}8$ (GTR).

Für $g = 22$ erhält man $P(Z = 0) \approx 0{,}792 < 0{,}8$ (GTR).

Wenn die Anzahl der grünen Schlangen höchstens 21 beträgt, erhält Lea mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % zwei Euro.

Aufgabe C 2

a) X: Anzahl der Würfe, die „Wappen“ zeigen
X ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = 0{,}62$.

Ereignis A (0,5 VP)

$P(A) = P(X = 20) \approx 0{,}133$ (GTR)

Ereignis B (1,5 VP)

$P(B) = P(X \geq 16) \approx 0{,}877$ (GTR)

Ereignis C (2 VP)

X_C: Anzahl der Würfe, die Wappen zeigen
X_C ist binomialverteilt mit $n = 27$ und $p = 0{,}62$.

$P(C) = 0{,}38^3 \cdot P(X_C > 13) \approx 0{,}049$ (GTR)

b) Maximale Anzahl der Würfe (2 VP)

Y: Anzahl der Würfe, die „Zahl“ zeigen
Y ist binomialverteilt mit unbekanntem Parameter n und $p = 0{,}38$.
Gesucht ist die größte Zahl n mit $P(Y > 10) \leq 0{,}2$.
Für $n = 22$ erhält man $P(Y > 10) \approx 0{,}173$, für $n = 23$ erhält man $P(Y > 10) \approx 0{,}223$ (GTR).

Man darf höchstens 22 Mal werfen.

c) Entscheidungsregel (2,5 VP)

Z: Anzahl der Würfe, die „Wappen“ zeigen
Stichprobenumfang $n = 200$, Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$
$H_0: p \geq 0{,}7$, $H_1: p < 0{,}7$ (linksseitiger Test)
Trifft H_0 zu, so ist Z im Extremfall binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0{,}7$.
Ablehnungsbereich ist $\{0,...,k\}$ mit maximalem k, für das $P(Z \leq k) \leq 0{,}05$ gilt.
Es ist $P(Z \leq 128) \approx 0{,}040$ und $P(Z \leq 129) \approx 0{,}054$ (GTR).

Wenn weniger als 129 Würfe „Wappen“ zeigen, wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls kann sie nicht verworfen werden.

Fehler für falsche Ablehnung von H_0, falls Wahrscheinlichkeit 72 % beträgt (1,5 VP)

Ist Z binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0{,}72$, so ist $P(Z \leq 128) \approx 0{,}008$ (GTR).

Die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 fälschlicherweise abgelehnt wird, beträgt dann 0,8 %.

