LK STOCHASTIK NRW 2021

Eine Fahrschule führt eine Statistik über die Führerscheinprüfungen. Aus Erfahrung weiß sie, dass die Anzahl der bestandenen Führerscheinprüfungen ihrer Prüflinge binomialverteilt ist und die Bestehenswahrscheinlichkeit $p = 0{,}7$ beträgt. Nun werden in dieser Fahrschule 250 Prüfungen abgenommen.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

E1: höchstens 160 Führerscheinprüfungen werden bestanden;

E2: der Anteil bestandener Führerscheinprüfungen liegt über 80 %;

E3: Die Zahl der bestandenen Führerscheinprüfungen ist um 5 größer als erwartet.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 165 Prüflinge ihre Führerscheinprüfung bestehen.

Ermitteln Sie die Anzahl k der bestandenen Führerscheinprüfungen so, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens k Führerscheinprüfungen bestanden werden, höchstens bei 60 % liegt.

Die Fahrschule möchte die Bestehensquote gerne verbessern und investiert dafür in die Digitalisierung ihrer Ausbildung. Anschließend möchte sie prüfen, ob die Bestehensquote durch die Maßnahmen auf über 70 % gestiegen ist. Sie führt einen Hypothesentest mit 200 Prüfungen durch und wählt dabei die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0{,}7$ und die Alternativhypothese $H_1 : p > 0{,}7$.

c) (1) Welchen Fehler wollte die Fahrschule mit der Wahl der Hypothese vermeiden?

(2) Formulieren Sie eine Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$.

(3) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Fahrschule irrtümlicherweise davon ausgeht, dass die Quote sich nicht verbessert hat, obwohl sie eigentlich auf 0,75 gestiegen ist.

d) Eine weitere Fahrschule in der Stadt macht ebenfalls eine Analyse ihrer Bestehensquoten. Sie geht ebenfalls davon aus, dass die Anzahl der bestandenen Prüfungen binomialverteilt ist und berechnet einen Erwartungswert von $\mu = 255$ und eine Standardabweichung von $\sigma = 6{,}18$.

Bestimmen Sie die zugehörigen Parameter p und n.

Lösungen

Das Mathe-Abitur in NRW war schon 2020 ein Witz auf Rädern. Was daran LK sein soll, weiß ich nicht – GTR haben sie auch noch.

Die Aufgabe wird auf youtube vorgerechnet.

a) Sei X die Anzahl der bestandenen Führerscheinprüfungen. X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}7$ und $n = 250$.

- $P(E_1) = P(X \leq 160) \approx 0{,}024$.

  Bemerkung: Diese Wahrscheinlichkeit ist klein, aber der Erwartungswert ist 165 und die Standardabweichung $\sigma \approx 7{,}25$; ganz grob liegen 70% der Ergebnisse im Intervall, das um höchstens σ vom Erwartungswert abweicht; im vorliegenden Fall ist $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(168 \leq X \leq 182) = P(X \leq 182) - P(X \leq 167) \approx 0{,}8499 - 0{,}1504 \approx 0{,}7$. Je weiter man von μ weggeht, umso kleiner wird die Wahrscheinlichkeit.

- 80 % von 250 sind 200; gesucht ist also $P(X > 200) = 1 - P(X \leq 200) \approx 1 - 0{,}99987 \approx 0{,}00013$.

  Bemerkung: Es ist wenig wahrscheinlich, dass mehr als 80 % bestehen, wenn die Wahrscheinlichkeit für Bestehen bei 70 % liegt.

- Der Erwartungswert ist $\mu = 0{,}7 \cdot 250 = 175$; gesucht ist $P(X = 180) \approx 0{,}044$.

b) Gesucht ist $P(X \geq 165) = 1 - P(X \leq 164) \approx 0{,}925$.

Wir müssen k so bestimmen, dass $P(X \geq k) \leq 0{,}6$ ist, also $P(X \leq k-1) \geq 0{,}4$. Probieren liefert

$k-1$	$P(X \leq k-1)$
172	0,362
173	0,415

Also muss $k - 1 = 173$ und damit $k = 174$ sein. Kontrolle:

$$P(X \geq 174) = 1 - P(X \leq 173) \approx 1 - 0{,}415 = 0{,}585.$$

c) (1) Der Fehler erster Art wird vermieden, weil dessen Wahrscheinlichkeit auf 5 % beschränkt wird; der Fehler 2. Art kann hier sehr groß sein (siehe unten).

Hier soll also der Fehler vermieden werden, die Nullhypothese abzulehnen, obwohl sie richtig ist. Im vorliegenden Fall ist das zu glauben, die Quote habe sich verbessert, obwohl das gar nicht der Fall ist.

(2) $H_0 : p \leq 0{,}7$; abgelehnt wird, wenn die Trefferzahl groß ist.

X ist die Anzahl der bestandenen Prüfungen; X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}7$ und $n = 200$.

Ansatz: $P(X \geq k) \leq 0{,}05$, also $P(X \leq k-1) > 0{,}95$.

k	$p(X \leq k)$
150	0,949
151	0,964

Also lehnt man die Nullhypothese ab, wenn mindestens 152 Personen die Prüfung bestehen.

Die Fahrschule nimmt an, dass die Quote sich nicht verbessert hat, die Nullhypothese als nicht abgelehnt wird, wenn höchstens 151 Personen die Prüfung bestehen. Gesucht ist also, wenn X binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0{,}75$ ist, $P(X \leq 151) \approx 0{,}592$.

d) Es ist $\mu = 255 = np$ und $\sigma = \sqrt{npq} = 6{,}18$. Also ist $q = \frac{npq}{np} = \frac{\sigma^2}{\mu} = \frac{6{,}18^2}{255} \approx 0{,}15$, folglich $p = 0{,}85$ und $n = \frac{\mu}{p} = \frac{255}{0{,}85} = 300$.