K2 AUFGABENFUNDUS

18.03.2021

1. Analysis

(1) Bestimmen Sie den Definitionsbereich folgender Funktionen.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

b) $f(x) = 2\sqrt{x-2}$

c) $f(x) = 3\ln(2x)$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(2) Bestimmen Sie den Wertebereich folgender Funktionen.

a) $f(x) = x^2 - 2$

b) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$

c) $f(x) = 3 - 2\sin(x)$

d) $f(x) = 2e^{-x} - 1$

(3) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Schaubild von f und den Koordinatenachsen im ersten Quadranten begrenzt wird.

a) $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2(x+1)^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$

d) $f(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

(4) Bestimmen Sie Stammfunktionen F der folgenden Funktionen f:

a) $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$

b) $f(x) = v'(x)\cos(v(x))$

c) $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

d) $f(x) = 3u'(x)(u(x))^2$

Hinweis: Raten, dann prüfen.

(5) Bestimmen Sie Stammfunktionen F der folgenden Funktionen f:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

b) $f(x) = 3x^2e^{x^3}$

c) $f(x) = x\sin(x^2)$

d) $f(x) = 10x \cdot (x^2+1)^4$

(6) Geben Sie die 43. Ableitung von f an.

a) $f(x) = e^{2x}$

b) $f(x) = \sin(2x)$

c) $f(x) = 3x^{40}$

d) $f(x) = \cos(ax)$

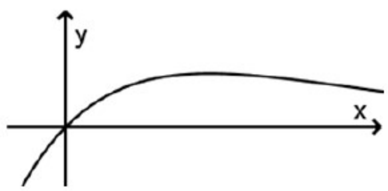
(7) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ definiert und zweimal differenzierbar. Es gilt $f'(5) = 0$ und $f''(5) = 2$.

Zeigen Sie, dass $g(x) = e^{-f(x)}$ an der Stelle $x = 5$ ein lokales Maximum besitzt.

Hinweis: „auf $\mathbb{R}$ definiert“ bedeutet, dass man in f alle reellen Zahlen x einsetzen darf. Eine Funktion ist zweimal differenzierbar, wenn die erste und die zweite Ableitung existiert.

Vorschlag: Nur lesen, was wichtig ist. g soll einen Hochpunkt in $x = 5$ haben, also muss $g'(5) = 0$ und $g''(5) < 0$ sein: Nachrechnen!

(8) Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.



Betrachtet werden die Dreiecke mit den Eckpunkten $O(0|0)$, $P(a|0)$ und $Q(a|f(a))$ mit $a > 0$.

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks APQ in Abhängigkeit von a.

b) Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den maximalen Flächeninhalt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a.

(9) Gegeben ist die Funktionenschar $p_k(x) = kx^2 - 4x + 3$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Bestimmen Sie k so, dass der Punkt $(2| - 3)$ auf dem Schaubild von p_k liegt.

b) Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für welche p_k keine Nullstelle besitzt.

c) Zeigen Sie, dass die Schaubilder aller p_k einen gemeinsamen Punkt besitzen.

d) Bestimmen Sie die Ortskurve aller Tiefpunkte von p_k.

(10) Für jeden Wert von $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x.$$

a) Eine der beiden Abbildungen stellt einen Graphen von f_a dar. Geben Sie an, für welche Abbildung dies zutrifft, und begründen Sie Ihre Antwort.

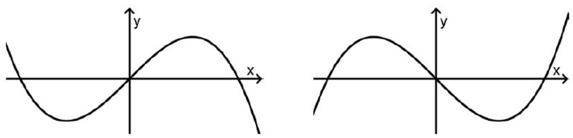


Abb. 1 Abb. 2

Für jeden Wert von a besitzt der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte. Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt hat.

(11) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1$.

a) Ermitteln Sie die Nullstelle von f.

b) Die Tangente an das Schaubild von f im Punkt S bildet mit den Koordinatenachsen ein gleichschenkliges Dreieck. Bestimmen Sie S.

(12) Gegeben ist die Funktion f' mit $f'(x) = 3x^2 - 6x - 6$.

a) Der Punkt $P(-1|10)$ liegt auf dem Graphen der Funktion f. Bestimmen Sie eine Gleichung von f.

b) Für die Funktion f gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ mit $a < b$ und $f(a) = f(b) = 0$.

Geben Sie die Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion f an. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(13) Gegeben sind eine Schar von Funktionen f_k mit $f_k(x) = kx^2$ $(k > 0)$ und eine Funktion g mit $g(x) = x^3$.

Die Graphen von f_k und g schließen im ersten Quadranten eine Fläche mit dem Flächeninhalt $A(k)$ ein. Bestimmen Sie $A(k)$.

Bestimmen Sie k so, dass der Flächeninhalt gleich $\frac{4}{3}$ wird.

2. Vektorgeometrie

(1) Für jeden Wert von $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bilden die Punkte $A(7|3|0)$, $B(5|3|4)$ und $C_t(5+2t|3|4+t)$ ein Dreieck.

a) Geben Sie ohne Rechnung eine Gleichung der Ebene an, in welcher das Dreieck liegt.

b) Zeigen Sie, dass alle Dreiecke rechtwinklig in B sind.

c) Bestimmen Sie alle Werte von t, für die im jeweiligen Dreieck ABC_t zwei Innenwinkel gleich groß sind.

(2) Die Punkte $A(1|1|1)$, $B(0|2|2)$ und $C(-1|0|2)$ liegen in der Ebene E.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalen- und Koordinatenform.

b) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von E mit der x_2-Achse an.

(3) Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(3|-6|6)$ und $F(2|-4|4)$, sowie die Gerade

$$g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und B. Zeigen Sie, dass sich g und h im Punkt F senkrecht schneiden.

b) Der Punkt C liegt auf g und ist verschieden von F. Geben Sie die besondere Bedeutung der Strecke $\overline{CF}$ im Dreieck ABC an.

(4) In einem Koordinatensystem ist ein gerader Zylinder mit dem Radius 5 und der Höhe 10 gegeben, dessen Grundfläche in der x_1x_2-Ebene liegt. $M(8|5|10)$ ist der Mittelpunkt der Deckfläche.

a) Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(5|1|0)$ auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders liegt.

b) Unter allen Punkten auf dem Rand der Deckfläche hat der Punkt S den kleinsten Abstand von P, der Punkt T den größten.

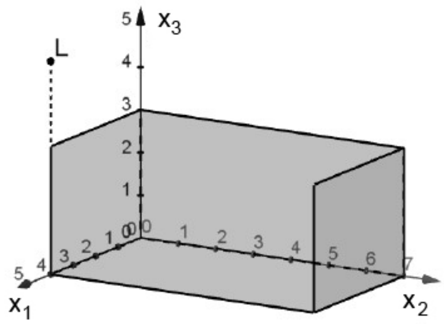
Geben Sie die Koordinaten von S an und bestimmen Sie die Koordinaten von T.

(5) Die Strecke $\overline{PQ}$ mit den Endpunkten $P(8|5|-1)$ und Q ist Durchmesser einer Kugel mit Mittelpunkt $M(5|1|-1)$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten von Q und weisen Sie nach, dass der Punkt $R(9|1|-4)$ auf der Kugel liegt.

b) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass das Dreieck PQR bei R rechtwinklig ist.

(6) Die Abbildung zeigt in einem Koordinatensystem modellhaft eine 7 m breite Theaterkulisse. Die linke Seitenwand liegt in der x_1x_3-Ebene, die rechte Seitenwand ist dazu parallel. Ein auf der Bühne stehender Gegenstand wird von einer Lampe beleuchtet. Die Lampe wird im Modell durch den Punkt $L(4|0|5)$ dargestellt, die Spitze des Gegenstandes durch den Punkt $S(1|6|2)$.



Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Schatten der Spitze auf der rechten Seitenwand liegt.

(7) Gegeben sind die Punkte $P(-2|3|0)$, $R(2|-1|2)$ und $Q(q|1|5)$ mit der reellen Zahl q, wobei Q von P genauso weit entfernt ist wie von R.

a) Bestimmen Sie q.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Eckpunkts S der Raute PQRS. Zeigen Sie, dass PQRS kein Quadrat ist.

(8) Gegeben sind die Ebene $E: 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$ und die Ebene $F: x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$.

a) Begründen Sie, dass die Ebenen E und F nicht parallel zueinander sind.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ursprungsgeraden, die sowohl zur Ebene E als auch zur Ebene F parallel ist.

3. Stochastik

(1) Ein Glücksrad besteht aus zwei unterschiedlich großen Sektoren. Der größere Sektor ist mit der Zahl 1 und der kleinere mit der Zahl 3 beschriftet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim einmaligen Drehen des Glücksrads die Zahl 1 zu erzielen, wird mit p bezeichnet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden erzielten Zahlen 4 ist, durch den Term $2p(1-p)$ angegeben wird.

b) Die Zufallsgröße X beschreibt die Summe der beiden erzielten Zahlen. Bestimmen Sie, für welchen Wert von p die Zufallsgröße den Erwartungswert 3 hat.

(2) In einem Zuchtbetrieb soll das Gewicht von Jungfischen näherungsweise durch eine normalverteilte Zufallsgröße X modelliert werden. Der Erwartungswert von X ist $\mu = 8$ g und die Standardabweichung ist $\sigma = 2$ g.

Die folgenden Abbildungen zeigen Glockenkurven normalverteilter Zufallsgrößen.

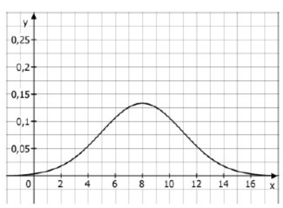


Abb. 1

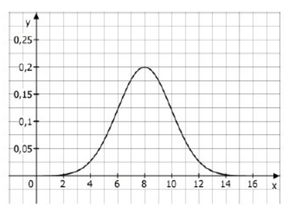


Abb. 2

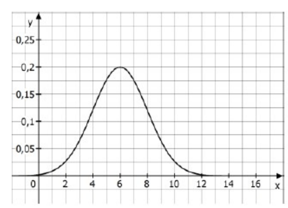


Abb. 3

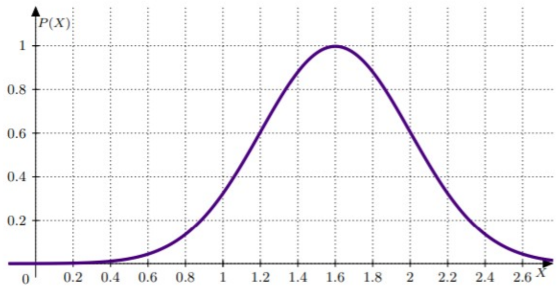
a) Begründen Sie, dass nur Abbildung 2 die Glockenkurve der Zufallsgröße X wiedergibt.

b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gewicht eines zufällig entnommenen Jungfisches kleiner als 4 g ist, beträgt nach dem Modell etwa 0,023.

Bestimmen Sie, wie groß nach diesem Modell die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass ein zufällig entnommener Fisch zwischen vier und acht Gramm[1] wiegt.

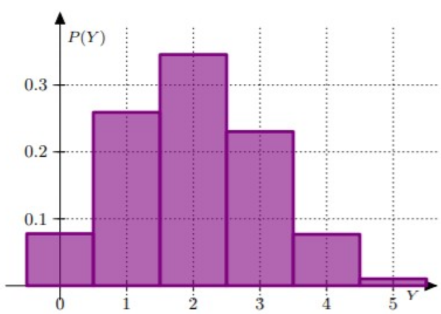
[1] Selbstverständlich ist hier nicht das Gewicht, sondern die Masse gemeint.

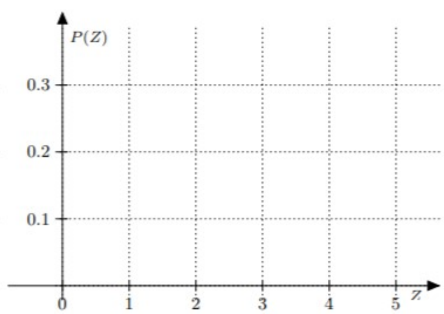
(3) Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße X.



Bestimmen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(1 \leq X \leq 1{,}4)$ und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

(4) Die Zufallsgrößen Y und Z seien binomialverteilt mit $p_Y = 0{,}4$ und $p_Z = 0{,}6$. Die Anzahl der Versuche sei $n = 5$. Die linke Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y. Stellen Sie in der rechten Abbildung die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z dar.





4. Wahlteilaufgaben

(Analysis, MV 2013)

Ein Teilbereich des Reitsports ist das Dressurreiten, dieses ist eine olympische Disziplin. Beim Dressurreiten präsentiert sich die gelernte und bestehende Harmonie zwischen Reiter und Pferd im Ausführen der verschiedenen Dressurlektionen. Ein Dressurviereck hat die Form eines Rechtecks von 40 Metern mit einer Breite von 20 Metern. Das Viereck ist mit verschiedenen Punkten markiert. In der Abbildung ist ein Teil des Vierecks dargestellt. 1 LE entspricht 1 m.

Eine Dressurlektion heißt "Durch den Zirkel wechseln".

Nicht jedem Reiter gelingt die Ausführung der Lektion exakt, daher werden im Folgenden die Bahnen im oberen Teil des Dressurvierecks durch die Graphen der Funktionenschar f_a mit der Gleichung

$$f_a(x) = -\frac{1}{24}ax^3 + 2ax + 8 \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

dargestellt.

(1) Bestimmen Sie den Wert für a so, dass der Graph der Funktion f_a die x-Achse in seinem Tiefpunkt berührt.

(2) Zeigen Sie, dass sich alle Graphen in den Punkten

$$P_1\big(-4\sqrt{3}\,|\,f_a(-4\sqrt{3}\,)\big), \quad P_2\big(0|f_a(0)\big) \quad \text{und} \quad P_3\big(4\sqrt{3}\,|\,f_a(4\sqrt{3}\,)\big)$$

schneiden.

Ermitteln Sie zwei Parameterwerte a_1 und a_2 so, dass die beiden Graphen der Funktionen f_{a_1} und f_{a_2} eine Fläche mit dem Inhalt von 144 m^2 einschließen.

(3) Eine weitere Lektion ist „Durch die halbe Bahn wechseln". Der Reiter reitet entlang der Geraden g durch die Punkte $K(10|14)$ und $B(-10|0)$.

Bestimmen Sie den Wert für a so, dass die Tangente im Wendepunkt an den Graphen der Funktion f_a und die Gerade g parallel zueinander sind.

Einen dicken Extrapunkt gibt es, wenn man mir erklären kann, was diese Fragen mit dem Sachzusamenhang zu tun haben. Welches Problem des Reiters wird hier mit der Mathematik gelöst?

(Geometrie MV 2013)

Gegeben sind die Punkte $A(2|2|2)$, $B(2|4|6)$, die Punkteschar $C_a(4|6|a)$ mit $a \in \mathbb{R}$, und die Ebene $E: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$.

(1) Zeigen Sie, dass es keinen reellen Wert für a gibt, sodass die Punkte A, B und C_a auf einer Geraden liegen.

(2) Bestimen Sie a so, dass C_a von A genauso weit entfernt ist wie A von B.

(3) Berechnen Sie alle Werte von a, für die der Punkt C_a Abstand 3 von der Geraden g_{AB} hat.

(4) Berechnen Sie a so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC_a minimal wird, und geben Sie den minimalen Flächeninhalt an.

(5) Die Punkte A, B und C_a spannen eine Ebenenschar E_a auf. Geben Sie eine Gleichung von E_a in Koordinatenform an.

(6) Gegeben ist eine Ebenenschar $E_b : (b - 10)x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2b - 16$ mit $b \in \mathbb{R}$. Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen nach.

   (a) Es gibt genau eine Ebene E_b, die senkrecht auf E steht.

   (b) Es gibt keine Ebene E_b, die parallel zu E ist.