K2 LERNSTANDSERHEBUNG

05.03.2021

Aufgabe	1	2	3	4
Punkte (max)	4	6	3	2
Punkte				

(1) Ein Glücksrad besitzt sechs gleich große Sektoren, von denen drei mit 0, zwei mit 1 und einer mit 4 beschriftet sind. Man dreht zweimal. Der Einsatz beträgt 1 € und man erhält das Produkt der gedrehten Zahlen ausgezahlt. Zeigen Sie, dass das Spiel fair ist.

(2) Sepp und Hansi versuchen ihr Glück auf einem Schießstand des Oktoberfests. Sepp trifft im Schnitt 70 % seiner Schüsse, Hansi 90 %. Jeder schießt fünfmal nacheinander. Sepp beginnt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

A: Sepp trifft genau dreimal.

B: Hansi verschießt höchstens einmal.

C: Sie treffen zusammen neunmal und zwar nacheinander.

D: Sie treffen zusammen genau achtmal.

(3) Bestimmen Sie k so, dass $f(x) = \frac{k}{x^2}$ eine Dichtefunktion auf dem Intervall $I = [1; 5]$ wird.

Berechnen Sie weiter die Wahrscheinlichkeit $p(2 \leq X \leq 3)$.

(4) Die Zufallsvariable X gibt die Länge von Schrauben in cm an. X ist normalverteilt mit den Parametern $\mu = 4{,}5$ und $\sigma = 0{,}3$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Die Schrauben haben eine Länge zwischen 4,2 cm und 4,8 cm.

B: Die Schrauben sind kürzer als 4,4 cm.

Lösungen

(1) *Ein Glücksrad besitzt sechs gleich große Sektoren, von denen drei mit 0, zwei mit 1 und einer mit 4 beschriftet sind. Man dreht zweimal. Der Einsatz beträgt 1 € und man erhält das Produkt der gedrehten Zahlen ausgezahlt. Zeigen Sie, dass das Spiel fair ist.*

A	0	1	4	16
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

Die Wahrscheinlichkeiten berechnet man so:

- $p(A = 16) = p(4{,}4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$;
- $p(A = 4) = p(1{,}4) + p(4{,}1) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$;
- $p(A = 1) = p(1{,}1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$;
- $p(A = 0) = 1 - \frac{1}{36} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{4}$.

Erwartungswert der Auszahlung $E(A) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{36} = 1$. Also ist der Erwartungswert für den Gewinn 0 € und das Spiel damit fair.

(2) *Sepp und Hansi versuchen ihr Glück auf einem Schießstand des Oktoberfests. Sepp trifft im Schnitt 70 % seiner Schüsse, Hansi 90 %. Jeder schießt fünfmal nacheinander. Sepp beginnt.*

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse:

A: *Sepp trifft genau dreimal.*

B: *Hansi verschießt höchstens einmal.*

C: *Sie treffen zusammen neunmal und zwar nacheinander.*

D: *Sie treffen zusammen genau achtmal.*

X sie die Anzahl der Treffer bei Sepp, Y die bei Hansi. X ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0{,}7$, Y mit $n = 5$ und $p = 0{,}9$.

A: $p(X = 3) \approx 0{,}309$.

B: $p(Y \geq 4) = 1 - p(Y \leq 3) \approx 0{,}919$

C: $p(C) = 0{,}7^5 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}9^5 \approx 0{,}054$.

D: $p(X = 5) \cdot p(Y = 3) + p(X = 4) \cdot p(Y = 4) + p(X = 3) \cdot p(Y = 5) \approx 0{,}01225 + 0{,}11815 + 0{,}18228 \approx 0{,}313$.

Manche haben die Wahrscheinlichkeit direkt bestimmt; natürlich gibt es bei $p(X = 4)$ genau $5 = \binom{5}{4}$ Pfade; bei $p(X = 3)$ sind dies aber $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ Pfade!

(3) *Bestimmen Sie k so, dass $f(x) = \frac{k}{x^2}$ eine Dichtefunktion auf dem Intervall $I = [1;5]$ wird.*

Berechnen Sie weiter die Wahrscheinlichkeit $p(2 \leq X \leq 3)$.

Aus
$$1 = \int_1^5 \frac{k}{x^2}\,dx = -\frac{k}{x}\Big|_1^5 = -\frac{k}{5} + k = \frac{4k}{5}$$
folgt $k = \frac{5}{4}$. Wegen $k > 0$ ist f auf dem Intervall I positiv.

Weiter ist
$$p(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 \frac{5}{4x^2}\,dx = -\frac{5}{4x}\Big|_2^3 = -\frac{5}{12} + \frac{5}{8} = \frac{5}{24}.$$

(4) *Die Zufallsvariable X gibt die Länge von Schrauben in cm an. X ist normalverteilt mit den Parametern $\mu = 4{,}5$ und $\sigma = 0{,}3$.*

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: *Die Schrauben haben eine Länge zwischen 4,2 cm und 4,8 cm.*

B: *Die Schrauben sind kürzer als 4,4 cm.*

Achtung: kürzer als 4,4 cm bedeutet nicht, dass die Schrauben höchstens 4,3 cm lang sind!

A: $p(A) = p(4{,}2 \leq X \leq 4{,}8) \approx 0{,}683$.

B: $p(X \leq 4{,}4) \approx 0{,}631$.