K2 LERNSTANDSERHEBUNG

05.03.2021

Aufgabe	1	2	3
Punkte (max)	4	6	5
Punkte			

(1) Ein Glücksrad besitzt sechs gleich große Sektoren, von denen drei mit 0, zwei mit 1 und einer mit 4 beschriftet sind. Man dreht zweimal. Der Einsatz beträgt 1 € und man erhält das Produkt der gedrehten Zahlen ausgezahlt. Zeigen Sie, dass das Spiel fair ist.

(2) Sepp und Hansi versuchen ihr Glück auf einem Schießstand des Oktoberfests. Sepp trifft im Schnitt 70 % seiner Schüsse, Hansi 90 %. Jeder schießt fünfmal nacheinander. Sepp beginnt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

A: Sepp trifft genau dreimal.

B: Hansi verschießt höchstens einmal.

C: Sie treffen zusammen neunmal und zwar nacheinander.

D: Sie treffen zusammen genau achtmal.

(3) Ein Hersteller von ferngesteuerten Modellautos garantiert, dass höchstens 8 % der ausgelieferten Autos einen Fehler aufweisen. Ein Spielzeughändler traut dieser Aussage nicht und überprüft dies durch einen Signifikanztest mit der Aussage des Herstellers als Nullhypothese, einem Stichprobenumfang 100 und Signifikanzniveau $\alpha = 5$ %.

Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für die Nullhypothese, formulieren Sie eine Entscheidungsregel und geben Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit an.

Lösungen

(1) *Ein Glücksrad besitzt sechs gleich große Sektoren, von denen drei mit 0, zwei mit 1 und einer mit 4 beschriftet sind. Man dreht zweimal. Der Einsatz beträgt 1 € und man erhält das Produkt der gedrehten Zahlen ausgezahlt. Zeigen Sie, dass das Spiel fair ist.*

A	0	1	4	16
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

Die Wahrscheinlichkeiten berechnet man so:

- $p(A = 16) = p(4{,}4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$;
- $p(A = 4) = p(1{,}4) + p(4{,}1) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$;
- $p(A = 1) = p(1{,}1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$;
- $p(A = 0) = 1 - \frac{1}{36} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{4}$.

Erwartungswert der Auszahlung $E(A) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{36} = 1$. Also ist der Erwartungswert für den Gewinn 0 € und das Spiel damit fair.

(2) *Sepp und Hansi versuchen ihr Glück auf einem Schießstand des Oktoberfests. Sepp trifft im Schnitt 70 % seiner Schüsse, Hansi 90 %. Jeder schießt fünfmal nacheinander. Sepp beginnt.*

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse:

A: *Sepp trifft genau dreimal.*

B: *Hansi verschießt höchstens einmal.*

C: *Sie treffen zusammen neunmal und zwar nacheinander.*

D: *Sie treffen zusammen genau achtmal.*

X sie die Anzahl der Treffer bei Sepp, Y die bei Hansi. X ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0{,}7$, Y mit $n = 5$ und $p = 0{,}9$.

A: $p(X = 3) \approx 0{,}309$.

B: $p(Y \geq 4) = 1 - p(Y \leq 3) \approx 0{,}919$

C: $p(C) = 0{,}7^5 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}9^5 \approx 0{,}054$.

D: $p(X = 5) \cdot p(Y = 3) + p(X = 4) \cdot p(Y = 4) + p(X = 3) \cdot p(Y = 5) \approx 0{,}01225 + 0{,}11815 + 0{,}18228 \approx 0{,}313$.

Manche haben die Wahrscheinlichkeit direkt bestimmt; natürlich gibt es bei $p(X = 4)$ genau $5 = \binom{5}{4}$ Pfade; bei $p(X = 3)$ sind dies aber $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ Pfade!

(3) *Ein Hersteller von ferngesteuerten Modellautos garantiert, dass höchstens 8 % der ausgelieferten Autos einen Fehler aufweisen. Ein Spielzeughändler traut dieser Aussage nicht und überprüft dies durch einen Signifikanztest mit der Aussage des Herstellers als Nullhypothese, einem Stichprobenumfang* 100 *und Signifikanzniveau* $\alpha = 5$ %.

Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für die Nullhypothese, formulieren Sie eine Entscheidungsregel und geben Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit an.

X sei die Anzahl der fehlerhaften Autos. X ist binomialverteilt mit $n = 100$. Nullhypothese: $p \leq 0{,}08$.

Ansatz: $p(X \geq k) < 0{,}05$.

k	$p(X \geq k)$
13	0,056
14	0,028

Ablehnungsbereich: $[14, 100]$;

Entscheidungsregel: Ab 14 fehlerhaften Autos lehnt man die Nullhypothese ab, sonst nicht.

Irrtumswahrscheinlichkeit $\approx 0{,}028$.