PFLICHTTEIL WAHRSCHEINLICHKEIT

F. LEMMERMEYER

BW 2013: Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch.

(a) Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.

B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch.

(b) Die neun Spielkarten werden gemischt und erneut verdeckt ausgelegt. Laura dreht nun so lange Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen, bis ein Ass erscheint. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an.

Welche Werte kann X annehmen?

Berechnen Sie $P(X \leq 2)$

BW 2013 NT: Ein Fußballspieler verwandelt erfahrungsgemäß 90 % aller Elfmeter.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von drei Elfmetern

- nur den letzten?
- mindestens einen?

(b) Für ein Ergeignis C gilt:

$$P(C) = \binom{30}{a} \cdot 0{,}9^b \cdot c^7.$$

Geben Sie geeignete Werte für a, b und c an.

Beschreiben Sie das Ereignis C in Worten.

BW 2014: An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele.

(a) Formulieren Sie ein Ereignis A, für das gilt:

$$P(A) = \binom{10}{8} \cdot \Big(\frac{2}{3}\Big)^8 \cdot (\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 + 10 \cdot \Big(\frac{2}{3}\Big)^9 \cdot (\Big(\frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{2}{3}\Big)^{10}.$$

(b) Jemand spielt vier Spiele an dem Automaten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er dabei genau zwei Mal?

BW 2014 NT: Ein idealer Würfel wird dreimal geworfen.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man dabei dreimal die gleiche Augenzahl?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens einmal eine Augenzahl größer als 4 zu würfeln?

(c) Notiert man die Ziffern in der gewürfelten Reihenfolge von links nach rechts, erhält man eine dreistellige Zahl.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Zahl kleiner als 661?

BW 2015: Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden:

Rot: 20 % Grün: 30 % Blau: 50 %

Das Glücksrad wird n-mal gedreht.

Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.

a) Begründe, dass X binomialverteilt ist.

Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$p(X = k)$	0,01	0,06	0,14	0,21	0,22	0,17	0,11	0,05	...

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal Rot angezeigt wird.

c) Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann. 20, 25 oder 30.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

BW 2015 NT: In einer Urne liegen eine schwarze und ver blaue Kugeln. Nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig gezogen und zur Seite gelegt, bis man die schwarze Kugel erhält.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Man erhält spätestens beim zweiten Zug die schwarze Kugel.

B: Man erhält die schwarze Kugel erst beim fünften Zug.

(b) Berechnen Sie, welche Anzahl an Ziehungen bei diesem Experiment durchschnittlich zu erwarten sind.

BW 2016: Bei einem Glücksrad werden die Zahlen 1, 2, 3 und 4 bei einmaligem Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt:

Zahl	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeite	0,4	0,1	0,3	0,2

(a) Das Glücksrad wird einmal gedreht. Geben Sie zwei verschiedene Ereignisse an, deren Wahrscheinlichkeit jeweils 0,7 beträgt.

(b) An dem Glücksrad sollen nur die Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2 so verändert werden, dass das folgende Spiel fair ist:

Für einen Einsatz von 2,50 €darf man einmal am Glücksrad drehen.

Die angezeigte Zahl gibt den Auszahlungsbetrag in Euro an.

Bestimmen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2.

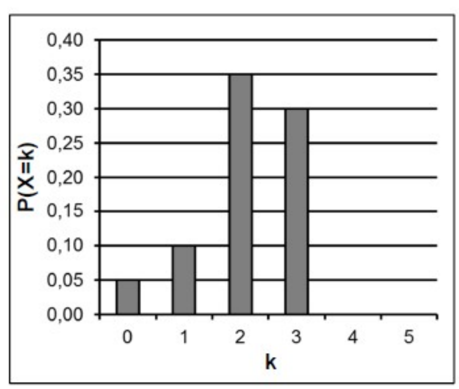
BW 2016 NT: Die Zufallsvariable X kann die Werte 0, 1, 2, 3, 4 und 5 annehmen.

Im nebenstehenden Diagramm ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nur für die Werte 0, 1, 2 und 3 dargestellt.

(a) Bestimmen Sie $P(X \leq 2)$.

(b) Begründen Sie, dass $P(X = 4) \leq 0{,}2$ gilt.

(c) Der Erwartungswert von X beträgt 2,55. Bestimmen Sie $P(X = 4)$ und $P(X = 5)$.



BW 2017: In einer Urne liegen drei rote, zwei grüne und eine blaue Kugel. Es werden so lange nacheinander einzelne Kugeln gezogen und zur Seite gelegt, bis man eine rote Kugel erhält.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man höchstens drei Kugeln zieht.

BW 2017 NT: Für ein Gewinnspiel mit einem Glücksrad sind in der Tabelle die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse und die zugehörigen Gewinne angegeben.

Farbe	blau	grün	rot
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,1	0,5
Gewinn bei einmaligem Drehen (in €)	g	2	-1

(a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass bei dreimaligem Drehen jede Farbe genau einmal erscheint.

Entscheiden Sie, ob $p = 3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5$ gilt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(b) Bestimmen Sie den Gewinn g für das Ergebnis „blau“ so, dass sich bei einmaligem Drehen ein faires Spiel ergibt.

BW 2018: Zwei ideale Würfel werden gleichzeitig geworfen.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei verschiedene Augenzahlen fallen.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine 1 und eine 2?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigen die Würfel zwei aufeinanderfolgende Zahlen?

BW 2018 NT: In einer Urne befinden sich sechs Kugeln, die mit Zahlen beschriftet sind. Drei Kugeln tragen die Zahl 3, zwei Kugeln die Zahl 2 und eine Kugel die Zahl 1.

Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X gibt die Summe der sich darauf befindenden Zahlen an.

(a) Geben Sie an, welche Werte X annehmen kann.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 4)$.

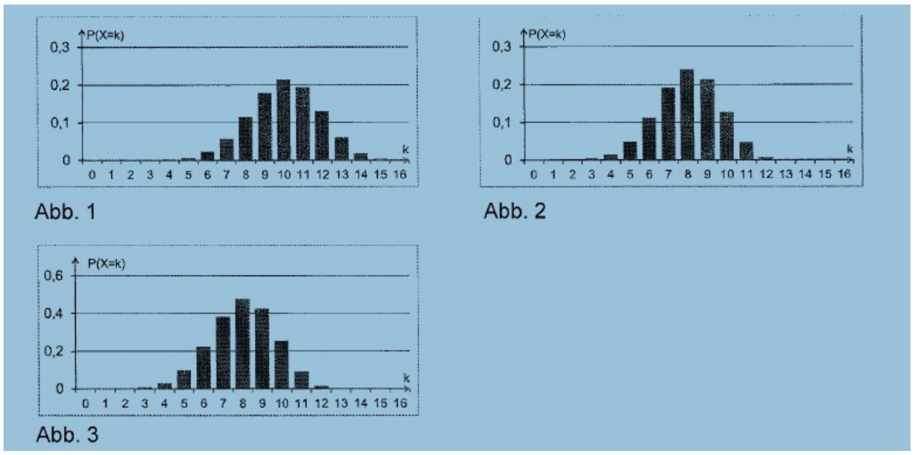
BW 2019: In einer Urne sind eine rote, eine weiße und drei schwarze Kugeln. Es wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis man eine schwarze Kugel zieht.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Man zieht genau zwei Kugeln.

B: Unter den gezogenen Kugeln befindet sich die rote Kugel.

BW 2019 NT: In einer Urne befinden sich blaue und rote Kugeln; insgesamt sind es 15 Stück. Es wird 12-mal zufällig eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln. Eine der drei folgenden Abbildungen zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.



(a) Begründen Sie, dass Abbildung 1 und Abbildung 3 nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X darstellen.

(b) Der Erwartungswert von X ist ganzzahlig. Bestimmen Sie die Anzahl der roten Kugeln in der Urne.

BW 2020: Auf einem Tisch liegen verdeckt vier rote und zwei schwarze Karten, mit denen Anna und Bernd das folgende Spiel spielen: Anna deckt in der ersten Runde nacheinander zwei Karten auf und legt sie nebeneinander auf den Tisch. Ist darunter mindestens eine schwarze Karte, dann gewinnt Anna und das Spiel ist beendet. Andernfalls deckt Bernd nacheinander zwei der übrigen Karten auf. Deckt er dabei mindestens eine schwarze Karte auf, so gewinnt er, ansonsten gewinnt Anna.

Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: Anna gewinnt das Spiel in der ersten Runde.

B: Anna gewinnt das Spiel.

BW 2020 NT: In einer Tüte sind sechs rotem drei weiße und ein gelbes Gummibärchen. Man nimmt sich drei Gummibärchen aus der Tüte und isst sie sofort.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Es wird kein rotes Gummibärchen gezogen.

B: Unter den gezogenen Gummibärchen kommt jede Farbe einmal vor.

C: Unter den gezogenen Gummibärchen sind mehr gelbe als rote.

BW Fundus 2021: a) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}8$. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dar.

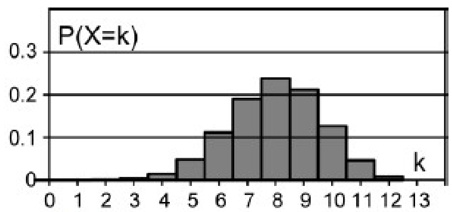


Abb. 1

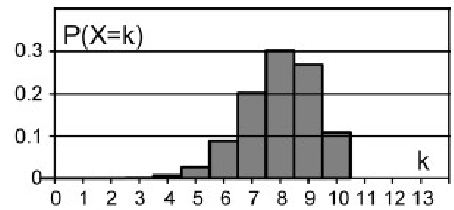


Abb. 2

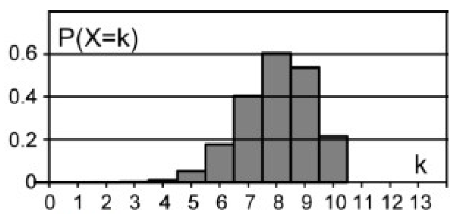


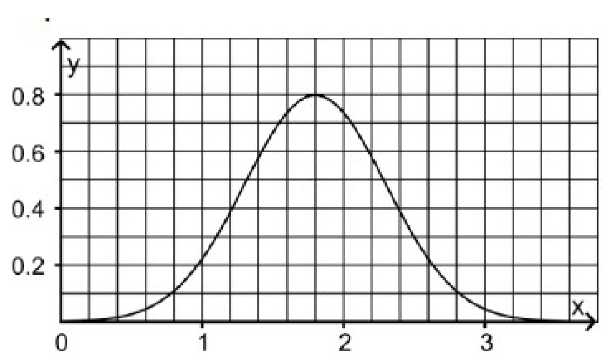
Abb. 3

Geben Sie die beiden Abbildungen an, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht darstellen. Begründen Sie Ihre Angabe.

b) Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern n und p. Es gilt: Der Erwartungswert von Y ist 8, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y ist symmetrisch.

Ermitteln Sie den Wert von n.

BW Fundus 2021: Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße X.



(a) Geben Sie den Erwartungswert von X an.

(b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass X den Wert 2,4 annimmt.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert aus dem Intervall $[1; 1{,}4]$ annimmt.

BW Fundus 2021: Die Zufallsgrößen X und Y können jeweils die Werte 3, 4 und 5 annehmen.

(a) Für die Zufallsgröße X gilt: $P(X = 3) = \frac{1}{3}$ und $P(X = 4) = \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

(b) Für die Zufallsgröße Y gilt: $P(Y = 3) = \frac{1}{3}$, $P(Y = 4) \geq \frac{1}{6}$ und $P(Y = 5) \geq \frac{1}{9}$. Bestimmen Sie alle Werte, die für den Erwartungswert von Y infrage kommen.

BW Fundus 2021: Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, ist p.

(a) Interpretieren Sie den Term $(1 - p)^7$ im Sachzusammenhang.

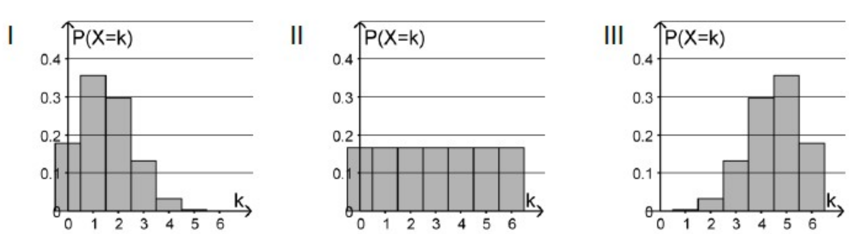
(b) Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

(c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50 %. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50 % war. Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50 % sein.„ Beurteilen Sie die Aussage von Felix.

BW Fundus 2021: Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

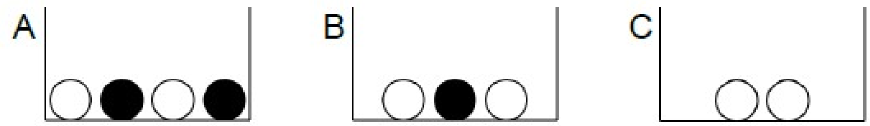
(a) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt. Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

(b) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße X dar:



Geben Sie an, welche Abbildung dies ist. Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

BW Fundus 2021: Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:



(a) Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden.

(b) Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel:

Es wird zunächst ein Einsatz von 1 Euro eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen.

Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt. Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.

BW Fundus 2021: Die binomialverteilten Zufallsgrößen X_1 und X_2 geben für Trefferwahrscheinlichkeiten von $p_1 = 0{,}8$ bzw. $p_2 = 0{,}2$ jeweils die Anzahl der Treffer bei fünf Versuchen an.

(a) Betrachtet wird die Zufallsgröße X_1. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer berechnet werden kann.

(b) Geben Sie für eine der beiden Zufallsgrößen ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term

$$1 - \left(\binom{5}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 + \binom{5}{5} \cdot 0{,}8^5\right)$$

angegeben wird.

(c) Abbildung 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_1. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_2 in Abbildung 2 dar.

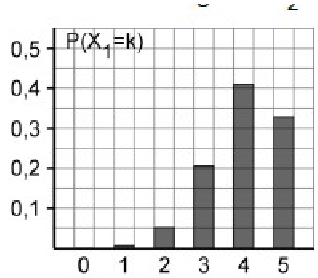


Abb. 1

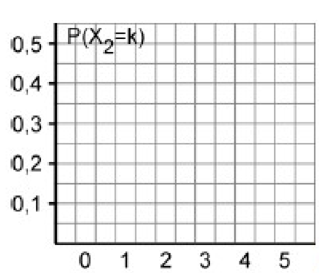


Abb. 2