STOCHASTIK II

FRANZ LEMMERMEYER

Uns fehlen in der Stochastik noch diverse Dinge:

- zweiseitiger Hypothesentest
- Standardabweichung
- Normalverteilung (nur oberflächlich)

Standardabweichung

Wenn zwei Klassen in einer Klassenarbeit beide den Durchschnitt 3,2 haben, bedeutet das nicht, dass die Noten ähnlich verteilt sind. In einer Klasse etwa könnten sie hauptsächlich zwischen 2 und 4 liegen, in der anderen breiter gestreut sein. Die Standardabweichung ist ein Maß dafür, wie sehr die Ergebnisse um den Mittelwert (bzw. den Erwartungswert) streuen. Eine kleine Standardabweichung bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeiten nur nahe beim Erwartungswert groß sind und dann schnell abfallen.

Nehmen wir zur Erklärung der Definition das Beispiel einer fairen Münze, die drei Mal geworfen wird. Die Zufallsvariable X zählt, wie oft Kopf kommt. Den Erwartungswert bestimmen wir bekanntlich so:

k	0	1	2	3
$p(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Der Erwartungswert von X ist die Größe

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5.$$

Man wird im Schnitt also 1,5 Mal Kopf erwarten.

Die Standardabweichung misst, wie sehr die Wahrscheinlichkeitsverteilung vom Mittelwert abweicht. Die Standardabweichung ist klein, wenn di Wahrscheinlichkeiten sehr schnell kleiner werden, wenn man vom Erwartungswert $\mu = E(X)$ weggeht. Für jedes k mit $0 \le k \le 3$ addiert man die Terme $(k-\mu)^2 p(X = k)$ und zieht am Ende die Wurzel. Dass man $(k-\mu)^2$ mit der Wahrscheinlichkeit multipliziert, liegt daran, dass man nicht will, dass sich große Abweichungen nach oben und unten aufheben: das würden sie bei $(k - \mu) \cdot p(X = k)$ machen. Dass man am Ende die Wurzel zieht, stellt sicher, dass σ die gleiche Einheit besitzt wie k.

Im obigen Beispiel ist also

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{(0-1{,}5)^2\cdot\frac{1}{8}+(1-1{,}5)^2\cdot\frac{3}{8}+(2-1{,}5)^2\cdot\frac{3}{8}+(4-1{,}5)^2\cdot\frac{1}{8}}\\ &= \sqrt{0{,}75}\approx 0{,}866.\end{aligned}$$

Die Terme nahe beim Erwartungswert werden durch den Faktor $(k-\mu)^2$ klein gemacht; ist k weit vom Erwartungswert weg, wird $(k-\mu)^2$ groß. Ein großes σ bedeutet also eine breite Streuung der Wahrscheinlichkeiten.

Für binomialverteilte Zufallsgrößen gibt es sowohl für den Erwartungswert wie auch für die Standardabweichung eine einfache Formel: Es ist $\mu = E(X) = np$ und

$$\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}.$$

Im obigen Beispiel ist X binomialverteilt und $\mu = 3\cdot\frac{1}{2} = 1{,}5$, sowie

$$\sigma = \sqrt{3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgaben

(1) Ein Würfel wird zwei Mal geworfen. Bestimmen Sie den Erwartungswert und DIE Standardabweichung für die Augensumme.

(2) In einer Urne liegen 4 weiße und 6 schwarze Kugeln. Man zieht drei Mal ohne Zurücklegen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln.

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

(3) Ein Bogenschütze trifft das Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}7$. Er schießt 10 Mal. X sei die Anzahl der Treffer.

a) Wie groß ist der Erwartungswert und die Standardabweichung von X?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Treffer um höchstens σ (bzw. 2σ) vom Erwartungswert abweicht?

c) Wie groß ist der Erwartungswert und die Standardabweichung für $p = 0{,}6$?

d) Für welche Trefferwahrscheinlichkeit ist die Standardabweichung maximal?

(4) Eine binomialverteilte Zufallsvariable X hat

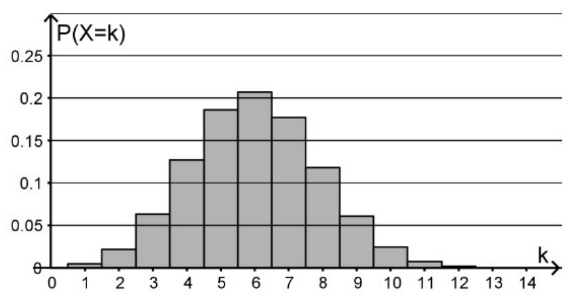
(a) Stichprobengröße $n = 20$ und Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{4}$; Bestimmen Sie Erwartungswert μ und Standardabweichung σ von X.

(b) Stichprobengröße $n = 16$ und Erwartungswert $\mu = E(X) = 2$. Bestimmen Sie die Trefferwahrscheinlichkeit p und die Standardabweichung σ von X.

(c) Stichprobengröße $n = 18$ und Standardabweichung $\sigma = 2$. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für die Trefferwahrscheinlichkeit p und den Erwartungswert μ von X.

(d) Erwartungswert $\mu = 6$ und Standardabweichung $\sigma = \frac{\sqrt{120}5}{}$. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für die Stichprobengröße n und die Trefferwahrscheinlichkeit p.

(5) (Aufgabenfundus Pflichtteil) Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n und p.



a) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Wahrscheinlichkeit

$$p(5 \leq X \leq 7).$$

b) X hat den Erwartungswert 6 und die Standardabweichung $\sqrt{3{,}6}$. Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von n und p.

Lösungen

(1) Ein Würfel wird zwei Mal geworfen. Bestimme Erwartungswert und Standardabweichung für die Augensumme.

Sei X die Augensumme. Diese kann alle Werte zwischen 2 und 12 annehmen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X sieht so aus:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Der Erwartungswert ist

$$\mu = E(X) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + \ldots + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36}$$
$$= \frac{252}{36} = 7.$$

Im Schnitt beträgt die Augensumme also 7.

Für die Standardabweichung erhalten wir

$$\sigma = \sqrt{\frac{(2-7)^2\cdot 1}{36} + \frac{(3-7)^2\cdot 2}{36} + \ldots + \frac{(12-7)^2\cdot 1}{36}}$$
$$= \sqrt{\frac{210}{36}} = \frac{\sqrt{210}}{6} \approx 2{,}4.$$

(2) *In einer Urne liegen 4 weiße und 6 schwarze Kugeln. Man zieht zwei Mal ohne Zurücklegen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln.*

Bestimme Erwartungswert und Standardabweichung von X.

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

k	0	1	2
Pfade	ss	$sw,\ ws$	ww
$p(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

Erwartungswert für die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln:

$$\mu = E(X) = 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{8}{15} + 2\cdot\frac{2}{15} = 0{,}8.$$

Im Schnitt zieht man 0,8 weiße Kugeln.

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{(0-0{,}8)^2\cdot 0 + (1-0{,}8)^2\cdot\frac{8}{15} + (2-0{,}8)^2\cdot\frac{2}{15}} = \sqrt{\frac{16}{75}} \approx 0{,}213.$$

(3) *Ein Bogenschütze trifft das Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}7$. Er schießt 10 Mal. X sei die Anzahl der Treffer.*

a) *Wie groß ist der Erwartungswert und die Standardabweichung von X?*

X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}7$. Also gilt

$$\mu = E(X) = np = 7,$$
$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} = \sqrt{2{,}1} \approx 1{,}45.$$

b) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Treffer um höchstens σ (bzw. 2σ) vom Erwartungswert abweicht?*

Wenn die Anzahl der Treffer um höchstens $\sigma = 1{,}45$ vom Erwartungswert $\mu = 7$ abweicht, dann muss $6 \le X \le 8$ sein. Es geht also um

$$p(6 \le X \le 8) = p(X \le 8) - p(X \le 5) \approx 0{,}8506 - 0{,}1503 \approx 0{,}7.$$

Soll die Anzahl der Treffer um höchstens $2\sigma = 2{,}9$ vom Erwartungswert $\mu = 7$ abweichen, dann liegt X zwischen 5 und 9:

$$p(5 \le X \le 9) = p(X \le 9) - p(X \le 4) \approx 0{,}9718 - 0{,}0473 \approx 0{,}92.$$

c) *Wie groß ist der Erwartungswert und die Standardabweichung für $p = 0{,}6$?*

In die Formeln einsetzen:

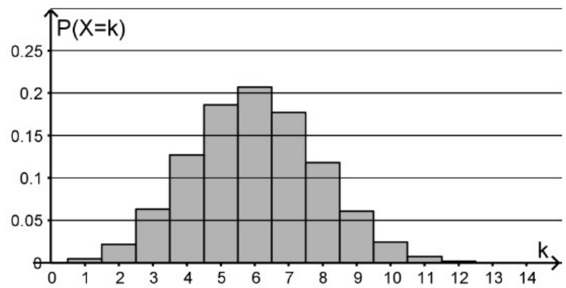
$$\mu = E(X) = np = 6,$$
$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{2{,}4} \approx 1{,}55.$$

d) *Für welche Trefferwahrscheinlichkeit ist die Standardabweichung maximal?*

Damit $\sigma = \sqrt{10p(1-p)}$ maximal wird, muss $p(1-p)$ maximal sein; Ableitung gleich 0 setzen ergibt $(p - p^2)' = 1 - 2p = 0$, also $p = \frac{1}{2}$: Bei dieser Wahrscheinlichkeit ist die Standardabweichung maximal, nämlich gleich

$$\sigma = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{2{,}5}.$$

(4) (Aufgabenfundus Pflichtteil) *Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n und p.*



a) *Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Wahrscheinlichkeit*

$$p(5 \leq X \leq 7).$$

Was kann man dem Diagramm entnehmen? Zum einen die Wahrscheinlichkeiten, etwa $p(X = 5) \approx 0{,}18$, $p(X = 6) \approx 0{,}21$ und $p(X = 7) \approx 0{,}175$. Damit kommt man auf $p(5 \leq X \leq 7) \approx 0{,}565$. Die Musterlösung gibt $p \approx 0{,}58$. Beides ist in Ordnung.

b) *X hat den Erwartungswert 6 und die Standardabweichung $\sqrt{3{,}6}$. Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von n und p.*

Der Erwartungswert ist bei binomialverteilten Zufallsgrößen in der Nähe der maximalen Wahrscheinlichkeit; hier wissen wir sogar, dass $E(X) = 6$ ist. Die Möglichkeit $n = 12$ und $p = \frac{1}{2}$ können wir ausschließen, denn bei $p = \frac{1}{2}$ müsste die Wahrscheinlichkeitsverteilung symmetrisch sein; hier ist aber $p(X = 5) > p(X = 7)$.

Um n und p exakt zu bestimmen, muss man die Formel für die Standardabweichung (wir sind im Pflichtteil) auswendig wissen:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

mit $q = 1 - p$. Also ist

$$\sqrt{3{,}6} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

und damit $3{,}6 = np(1 - p)$. Wegen $E(X) = np = 6$ folgt damit $3{,}6 = 6(1 - p)$, also $1 - p = 0{,}6$ und damit $p = 0{,}4$; wegen $E(X) = np = 6$ ist daher $n = \frac{6}{0{,}4} = \frac{60}{4} = 15$.