STOCHASTIK

FRANZ LEMMERMEYER

Heute gehen wir die Aufgaben durch, die ich auf dem Landesbildungsserver BW gefunden habe.

Zuerst die Aufgaben, und zwar ungeschönt:

(1) Die erfolgreiche Samstagabend-Fernsehshow „Verstehen Sie Mathe?“ ist neu überarbeitet worden. Bisher erreichte sie Einschaltquoten von bis zu 20 %. Mit der neuen Ausrichtung soll diese Quote gesteigert werden. Andernfalls soll zum alten Konzept zurückgekehrt werden.

  Nach der Ausstrahlung werden in einer Umfrage 150 Menschen befragt, ob sie die Show mitverfolgt haben. 36 der Befragten bejahren dies. Der verantwortliche Produzent ist sich der Zufälligkeit der Auswahl bei dieser Stichprobe bewusst und akzeptiert einen Fehler von 5 %.

  Kann er mit dem Ergebnis die Nullhypothese „die Quote bleibt unverändert“ verwerfen? Bestimme den Ablehungsbereich.

(2) Der Mathelehrer Dr. Hecht behauptet, dass höchstens 5 % seiner Schüler im Abitur unter fünf Punkten abschneiden.

  Die Kursstufe 2 möchte diese Behauptung mit ihren Abiturergebnissen überprüfen. Sie einigen sich auf einen Fehler von 5 %. Tatsächlich schreiben drei von 28 SchülerInnen schlechter als fünf Punkte.

(3) Bei einem ausgesuchten Hotel einer internationalen Kette wurde der Frühstücksraum aufwendig modernisiert und das Angebot erweitert. Bevor die kostspieligen Maßnahmen auch in anderen Hotels der Kette durchgeführt werden, soll auf Grundlage eines Hypothesentests ermittelt werden, ob die Zufriedenheit der Gäste beim Frühstück gestiegen ist. Bisher erhielt das Hotel in diesem Bereich eine 90 %-ige Zustimmung. Die Geschäftsführung legt sich bei der Entscheidungsregel auf ein Signifikanzniveau von 10 % fest.

  Bei der Stichprobe aus 80 zufällig ausgewählten Gästen geben 76 Gäste an, mit dem Frühstücksangebot zufrieden zu sein. Wie entscheidet sich das Management. Interpretiere den Fehler 1. Art im Sachzusammenhang. Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit?

(4) Am Clara-Schumann-Gymnasium werden jedes Jahr am Nikolaustag für Schüler und Lehrer „Weckmänner“ gebacken. Die Küche behauptet: „80 % der Weckmänner haben ein Größe von mindestens 20 cm“. Diese Behauptung wird von der Schulleitung stolz im Elternbrief verkündet. Die Schülerinnen und Schüler der Kursstufe zweifeln an der Richtigkeit dieser Aussage, die Schulleitung hingegen behautet, der Prozentsatz sei sogar noch höher. Beide Seiten möchten die Gültigkeit ihrer Behauptung mit einer Stichprobe untermauern. Man einigt sich darauf, 20 Exemplaren zu prüfen sowie auf ein Signifikanzniveau von 5 %. Berechne den Ablehnungsbereich und die maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit.

Gehen wir die Aufgaben also durch

Aufgabe 1. Das erste Problem, wenn man von der bescheuerten Einkleidung mal absieht, ist, dass wir gar nicht wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit, dass jemand die Show sieht, überhaupt ist. Angegeben ist ja nur, dass diese Wahrscheinlichkeit „bis zu 20 %“ beträgt. Dass der Produzent der Show die Umfrage durchführt, ist lächerlich – dafür gibt es Fachleute, und, soviel kann man sagen: der Aufgabensteller gehört nicht dazu. Denn wenn der verantwortliche Produzent “sich der Zufälligkeit der Auswahl bei dieser Stichprobe bewusst„ ist, dann heißt das ja, dass die Leute zufällig ausgewählt worden sind. Dies ist bei derartigen Umfragen aber nicht der Fall, denn zur Ermittlung von Einschaltquoten wird der Anteil der Zuschauer gezählt, die einen Fernseher besitzen.

Weiter kann man die Aussage „Die Quote bleibt unverändert“ mit einem Hypothesentest gar nicht testen, zum einen, weil die Quote ja unbekannt ist, zum andern, weil Hypothesentests immer nur prüfen, ob die Wahrscheinlichkeit in einem bestimmten Bereich liegt und nicht, ob die Wahrscheinlichkeit *gleich* irgendeinem Wert ist.

Schauen wir uns also die mitgelieferte Lösung an. Dass man ein Arbeitsblatt auf dem Landesbildungsserver veröffentlicht und nicht einmal die Rechtschreibung und Grammatik korrigiert, ist ein Armutszeugnis und lässt nichts Gutes erwarten.

> *X ist binomialverteilt mit $n = 150$ und $p = 0{,}2$ (bzw. $B_{150;0,2}$-verteilt und beschreibt die Anzahl der Zuschauer in der Stichprobe.*
>
> *Es ist $\alpha = 5$ % und $H_0 : p = 20$ %, $H_1 : p > 20$ %*

In der Mathematik ist es üblich, eine Unbekannte zu definieren, bevor man sie benutzt. Weiter sind H_0 und H_1 Alternativen; wenn also $H_1 : p > 20$ % ist, dann kann nicht $H_0 : p = 20$ % sein, sondern vielmehr $H_0 : p \leq 20$ %. Der gleiche Fehler findet sich auch zuhauf im Lambacher-Schweizer; daran kann man erkennen, dass Hypothesentests auch die Lehrbuchautoren überfordern.

Richtig macht man es so:

- X beschreibt die Anzahl der Befragten, welche die Show gesehen haben.
- X ist binomialverteilt mit $n = 150$ und $p = 0{,}2$
- Die Nullhypothese ist $H_0 : p \leq 0{,}2$.

Dass hier eine Binomialverteilung vorliegen soll, ist zweifelhaft, denn ob ich am Samstag eine bescheuerte Show ansehe oder nicht ist kein Zufallsexperiment. Die Nullhypothese muss man erraten, die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$ auch. Aber sonst ist die Aufgabe in Ordnung.

Die Lösung verläuft damit so: Die Nullhypothese sagt, dass die Wahrscheinlichkeit unter 0,2 liegt, also wird abgelehnt, wenn es viele Zuschauer gibt; die Wahrscheinlichkeit für mindestens k Zuschauer soll dabei unter dem Signifikanzniveau liegen: $p(X \geq k) < 0{,}05$. Der Erwartungswert liegt bei $E = n \cdot p = 150 \cdot 0{,}2 = 30$ Zuschauern; wenn es deutlich mehr sind, lehnt man ab. Man findet

$$p(X \geq 38) = 1 - p(X \leq 37) \approx 0{,}0658$$
$$p(X \geq 39) = 1 - p(X \leq 38) \approx 0{,}0446$$

Abgelehnt wird das Unwahrscheinliche: Der Ablehnungsbereich ist $A = [38; 150]$; die Entscheidungsregel: *Bei mindestens 39 Zuschauern unter den Befragten wird die Nullhypothese abgelehnt.* Das ist hier (36 Zuschauer) nicht der Fall, also wird weitergemacht wie zuvor, obwohl 24 % der Befragten die Show gesehen haben.

Verstehen muss man das nicht. Es reicht, wenn man das Schema abspult und die gewünschte Antwort hinschreibt.

Aufgabe 2. Ich liebe Aufgaben ohne Aufgabenstellung. Schüler und Schülerinnen finden sich von solchen offenen Problem angezogen, sagt man. Was machen wir also? Dr Hecht sagt, höchstens 5 % seiner Schülerinnen hätten im Abi weniger als 5 NP. Drei von 28 sind über 10 %: Damit hat Dr. Hecht Mist erzählt.

Die Tatsache, dass von einem „Fehler von 5 %“ die Rede ist, lässt einen aber vermuten, dass es hier um einen Hypothesentest gehen soll. Warum sich die K2 auf einen Fehler von 5 % einigt, weiß man nicht; gemeint ist natürlich, dass der Fehler maximal 5 % sein soll, das Signifikanzniveau also $\alpha = 0{,}05$ ist. Die Nullhypothese muss man erraten; erfahrene Schüler vermuten, dass es hier um $H_0 : p \leq 0{,}05$ geht, was man dem Text aber nicht entnehmen kann. Dazu sollte man im Aufgabentext zumindest präzisieren, was genau Dr. Hecht behauptet. Eine mögliche Behauptung wäre: „Bei mir unterpunkten nie mehr als 5 %“; das ist eine absolute Behauptung, die von seiner K2 widerlegt wurde. Eine weitere mögliche Behauptung wäre: „Der langjährige Schnitt an Unterpunktern im Matheabi liegt in meinen Kursen unter 5 %.“ Offenbar kann man nur dann einen Hypothesentest machen, wenn man die zweite Möglichkeit nimmt. Wie man die Nullhypothese wählt, wenn Dr. Hecht $p < 0{,}05$ behauptet, ist aber immer noch nicht klar. Der Lambacher-Schweizer gibt als Faustregel, dass man als Alternative die Behauptung wählt, die man gerne bestätigt hätte: Hypothesentests als Wunschkonzert. Wählen wir also $H_0 : p < 0{,}05$, weil wir uns wünschen, dass Dr. Hecht unrecht hat.

Weiter nehmen wir mit dem Aufgabensteller an, dass es sich beim Mathematikabitur um ein Zufallsexperiment handelt, bei der sich das Unterpunkten mit der Binomialverteilung beschreiben lässt.

Wenn man diese Annahmen gemacht hat, kann man in der Tat anfangen zu rechnen: Der Ansatz für den Ablehnungsbereich $A = [k; 28]$ ist $p(X \geq k) < 0{,}05$. Der Erwartungswert für die Anzahl der Unterpunkter ist 1,4. Bei deutlich mehr Unterpunktern wird abgelehnt.

$$p(X \geq 3) = 1 - p(X \leq 2) \approx 0{,}163$$
$$p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3) \approx 0{,}049$$

Also wird abgelehnt, wenn mindestens 4 Schüler unterpunkten. Im vorliegenden Fall wird nicht abgelehnt.

Offensichtlich soll bei fehlender Aufgabenstellung auch die Irrtumswahrscheinlichkeit bestimmt werden. Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 5 Schüler unterpunkten, obwohl die Wahrscheinlichkeit zu unterpunkten bei 5 % liegt. Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist daher

$$p(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4) \approx 0{,}0117,$$

also etwa 1,2 %.

Aufgabe 3. Auch hier, man ahnt es schon, muss man die Nullhypothese erraten. X beschreibt die Anzahl der Gäste, die mit dem Frühstück zufrieden sind. Anscheinend ist diese Anzahl binomialverteilt und die Zufriedenheit mit dem Frühstück ein Zufallsexperiment. Wir raten einmal, dass die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}9$ lautet. Wir schauen in der Lösung nach und stellen fest, dass wir uns geirrt haben.

Die Nullhypothese ist also $H_0 : p \leq 0{,}9$. Abgelehnt wird, wenn viele Gäste mit dem Angebot zufrieden sind.

- X beschreibt die Anzahl der Gäste, die mit dem Frühstück zufrieden sind.
- X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}9$ und $n = 80$.
- Die Nullhypothese ist $H_0 : p \leq 0{,}9$.
- Der Ansatz für den Ablehnungsbereich $A = [k; 80]$ ist $p(X \geq k) < 0{,}1$.

Man erwartet 72 zufriedene Gäste. Wir rechnen:

$$p(X \geq 75) = 1 - p(X \leq 74) \approx 0{,}177,$$
$$p(X \geq 76) = 1 - p(X \leq 75) \approx 0{,}088.$$

Man lehnt die Nullhypothese ab, wenn mindestens 76 Gäste zufrieden sind. Das ist hier der Fall.

Fehler 1. Art bedeutet Ablehnung der Nullhypothese, obwohl diese richtig ist. Hier bedeutet das also, dass man annimmt, die Zufriedenheit habe sich gesteigert, obwohl das nicht der Fall ist. Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist

$$p(X \geq 76) = 1 - p(X \leq 75) \approx 0{,}088.$$

Aufgabe 4. Bei Aufgabe 3 haben wir gelernt, dass es ratsam ist, die Nullhypothese in der Lösung nachzuschauen. Im vorliegenden Fall glaubt der Aufgabenstellung, dass man seiner Aufgabe entnehmen kann, dass Schulleitung und Schüler verschiedene Nullhypothesen betrachten. Wozu sie sich dann überhaupt auf irgendetwas geeinigt haben, weiß man nicht. Das wird wohl ein bisschen sein wie bei den Corona-Gipfeln, bei denen sich 16 Ministerpräsidenten auf irgendetwas einigen, um dann noch während der Pressekonferenz zu verkünden, dass sie es doch anders handhaben als beschlossen. Insofern eine Aufgabe aus dem richtigen Leben.

Wir machen also zwei Hypothesentests. In beiden ist $n = 20$ und $p = 0{,}8$, sowie $\alpha = 0{,}05$, und X zählt die Weckmänner mit mindestens 20 cm. Size matters.

Schulleitung $H_0 : p < 0{,}8$; Ablehnungsbereich $[k, 20]$. Ansatz: $p(X \geq k) < 0{,}05$.

$$p(X \geq 19) = 1 - p(X \leq 18) \approx 0{,}069,$$
$$p(X \geq 20) = 1 - p(X \leq 19) \approx 0{,}0115.$$

Also wird nur abgelehnt, wenn 20 Weckmänner groß genug sind.

Schüler $H_0 : p \geq 0{,}8$; Ablehnungsbereich $[0; k]$. Ansatz: $p(X \leq k) < 0{,}05$.

$$p(X \leq 13) \approx 0{,}0867,$$
$$p(X \leq 12) \approx 0{,}0321.$$

Also ist der Ablehnungsbereich $[0; 12]$.

Die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt 0,0115 bei der Schulleitung und 0,0321 bei den Schülern.

Was man glauben soll, wenn unter den 20 Weckmännern 19 große sind, wird nicht verraten. Offenbar sind Hypothesentests auf Abiturniveau nur dazu da, unverstandenes Halbwissen zu testen.