STOCHASTIK

FRANZ LEMMERMEYER, MARKUS SCHLEGEL

Wir beginnen mit einigen allgemeinen Bemerkungen, die der Wiederholung (und nicht der Verwirrung) dienen sollen.

1. Laplace-Verteilung

Bei Zufallsexperimenten kann man das Ergebnis eines Experiments nicht vorhersagen. Bei einfachen Vorgängen kann man aber die Wahrscheinlichkeit berechnen, mit der ein Ereignis eintritt. Dazu muss man die Wahrscheinlichkeitsverteilung kennen.

Oft wird auf der Schule so getan, als sei von vornherein klar, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt. Im einfachsten Fall ist das die Laplace-Verteilung, bei der jedes mögliche Ereignis dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt:

- Beim Werfen einer idealen Münze erscheinen Kopf und Zahl mit derselben Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$; dies ist die eigentliche Bedeutung des Worts „ideal“. Aber auch wenn das Wort fehlt, wird man, wenn nicht anders gesagt, von einer Laplace-Verteilung ausgehen.
- Beim Werfen eines idealen Würfels erscheinen die Zahlen von 1 bis 6 mit derselben Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$.
- Beim Drehen eines Glücksrads mit gleich großen Sektoren nimmt man an, dass jeder Sektor mit derselben Wahrscheinlichkeit erscheint.

2. Pfadregeln und Erwartungswert

Werden Zufallsexperimente hintereinander ausgeführt, dann kann man Wahrscheinlichkeiten oft mit den beiden Pfadregeln bestimmen.

- 1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit einer Folge von Zufallsexperimenten ist gleich dem *Produkt* der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfads (etwa in einem Baumdiagramm).
- 2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das aus mehreren Pfaden besteht, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade.

Man müsste etwas weiter ausholen, um diese Dinge mathematisch genau formulieren zu können – für den Hausgebrauch reicht es, wenn man die Pfadregeln anwenden kann.

Weiter muss man den Erwartungswert einer Zufallsvariablen X bestimmen können. Nimmt X nur die Werte k_1, k_2 und k_3 an, ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung also

k	k_1	k_2	k_3
$p(X = k)$	p_1	p_2	p_3

dann ist der Erwartungswert von X gegeben durch

$$E(X) = k_1 \cdot p_1 + k_2 \cdot p_2 + k_3 \cdot p_3.$$

Der Erwartungswert ist ein *Mittelwert* (und keine Wahrscheinlichkeit). Der Erwartungswert der Augenzahl beim Würfeln eines idealen Würfels ist etwa 3,5: im Durchschnitt würfelt man eine Augenzahl von 3,5.

Aufgaben

(1) Eine Urne enthält eine gelbe, zwei rote und drei blaue Kugeln. Man zieht dreimal ohne Zurücklegen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse: man zieht

- A drei blaue Kugeln
- B keine gelbe Kugel
- C drei verschiedene Farben
- D im 2. Zug eine gelbe Kugel
- E nur im 1. und 3. Zug die gleiche Farbe

(2) Ein Glücksrad besitzt drei gleich große Sektoren, die mit den Zahlen 0, 1 und 2 beschriftet sind. Man dreht zweimal und erhält das Produkt der gedrehten Zahlen in Euro ausgezahlt. Der Einsatz beträgt 1 €.

- (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung (d.h., geben Sie also für jede mögliche Auszahlung die zugehörige Tabelle an).
- (b) Zeigen Sie, dass das Spiel fair ist.

(3) Bei einem Schneckenrennen starten sieben Schnecken. Man geht davon aus, dass alle dieselben Wahrscheinlichkeiten für den Sieg besitzen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man

- (a) die ersten drei Plätze richtig vorhersagt (in der richtigen Reihenfolge)?
- (b) die drei Schnecken vorhersagt, welche die ersten drei Plätze belegen (Reihenfolge egal)?

(4) a) Ein Würfel wird dreimal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A man wirft nur gerade Zahlen

B Die Augensumme ist mindestens 4

C Man wirft genau eine 6

D Man wirft mindestens eine 6

b) Wie oft müsste man den Würfel mindestens werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,9 % mindestens einmal keine 6 zu erhalten?

(5) Eine Urne enthält 4 weiße und 6 rote Kugeln. Man zieht zweimal mit Zurücklegen.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

A zwei verschiedene Farben

B mindestens einmal rot

(b) Wie viele weiße Kugeln müsste man zusätzlich in die Urne legen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine rote Kugel genau 64 % beträgt?

(c) Wie viele weiße Kugeln müsste man zusätzlich in die Urne legen, damit die Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedene Farben maximal ist?

(6) Alex und Bo werfen abwechselnd auf einen Basketballkorb. Alex trifft mit im Schnitt 2 von 5 Würfen, Bo im Schnitt 4 von 5 Würfen. Wer zuerst trifft, gewinnt das Spiel. Verwerfen beide jeweils zweimal, so endet das Spiel unentschieden. Alex beginnt.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet das Spiel unentschieden?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird viermal geworfen?

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Würfe.

(d) Wie groß müsste die Trefferquote von Bo sein, damit das Spiel fair ist?

3. Binomialverteilung

Ein paar grundlegende Definitionen:

- Ein *Bernoulli-Experiment* ist ein Wahrscheinlichkeitsexperiment, bei welchem man sich nur für zwei mögliche Ergebnisse interessiert, etwa Treffer oder Niete, Kopf oder Zahl, Sechs oder keine Sechs.
- Eine *Bernoulli-Kette* ist eine Folge von *unabhängigen* Bernoulli-Experimenten, bei welchen die Trefferwahrscheinlichkeit also immer gleich bleibt.

Liegt eine Bernoulli-Kette der Länge n vor, so kann man nach der Anzahl aller Versuche fragen mit genau, mindestens oder höchstens k Treffer. Nennt man X die Anzahl aller Treffer, dann ist X binomialverteilt, und es gilt

- $p(X = k)$ ist die Wahrscheinlichkeit von genau k Treffern;
- $p(X \leq k)$ ist die Wahrscheinlichkeit von höchstens k Treffern;
- $p(X \geq k) = 1 - p(X \leq k-1)$ ist die Wahrscheinlichkeit von mindestens k Treffern;
- $p(k \leq X \leq m)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Treffer mindestens k und höchstens m ist.

Wird nach einer Wahrscheinlichkeit gefragt, bei welcher irgendetwas beim ersten Mal oder zweimal hintereinander etc. passiert, kann man keine Binomialverteilung anwenden, sondern muss mit den Pfadregeln arbeiten.

Um bei Vorliegen einer Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit $p(X = k)$ von k Treffern zu bestimmen, überlegt man sich erst, dass alle Pfade mit k Treffern (und damit $n - k$ Nieten) alle dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. Ist p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer, dann ist $q = 1 - p$ die Wahrscheinlichkeit für eine Niete, und die Wahrscheinlichkeit für TTNTN ist $p(TTNTN) = p^3q^2$. Um die Wahrscheinlichkeit für genau drei Treffer zu bestimmen, muss man noch die Anzahl aller Pfade mit genau drei Treffern bestimmen.

Dazu gehen wir vor wie folgt. Wir haben 5 Plätze, auf die wir 3 T und 2 N verteilen müssen. Für das erste T haben wir 5 Plätze, für das zweite 4 und für das dritte 3; die restlichen Plätze werden mit den beiden N aufgefüllt. Dies sind $5 \cdot 4 \cdot 3$ Möglichkeiten, allerdings haben wir die Pfade dabei mehrfach gezählt. Es ist ja für den Pfad TTNTN egal, ob man das erste T auf den ersten, den zweiten oder den vierten Platz schreibt. Es gibt also 3 Möglichkeiten, das erste T an den richtigen Platz zu setzen, 2 Möglichkeiten für das zweite und eine Möglichkeit für das dritte T. Insgesamt gibt es also $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ verschiedene Möglichkeiten, die T an ihren Platz zu schreiben. Wir haben also bei den $5 \cdot 4 \cdot 3 = 120$ Möglichkeiten jeden Pfad $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Mal gezählt. Die Anzahl der Pfade mit drei Treffern und zwei Nieten ist also $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$. Solche Anzahlen kommen sehr oft vor; man bezeichnet diese Zahlen als Binomialkoeffizienten

und schreibt
$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$
Die Anzahl aller Pfade der Länge 8 mit 3 Treffern ist entsprechend
$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56.$$
Allgemein ist die Anzahl aller Pfade der Länge n mit k Treffern gleich
$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 1}.$$
Weil es gleich viele Pfade der Länge 5 mit genau 3 Treffern gibt wie Pfade der Länge 5 mit genau 2 Nieten, muss $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$ sein; das ist natürlich der Fall, denn Kürzen der 3 zeigt
$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \binom{5}{2}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit, bei einer Bernoulli-Ketter der Länge n genau k Treffer zu erhalten, beträgt also
$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Dies nennt man die Formel von Bernoulli. Im WTR ist diese unter binomial distribution einprogrammiert.

(1) Berechne die folgenden Binomialkoeffizienten.

a) $\binom{4}{2} =$ b) $\binom{5}{1} =$

c) $\binom{6}{3} =$ d) $\binom{8}{2} =$

(2) Eine ideale Münze wird 5-mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse von Hand und mit WTR.

(a) Es erscheint 5-mal Zahl;

(b) Es erscheint genau einmal Zahl;

(c) Es erscheint genau drei Mal Zahl, und zwar hintereinander;

(d) Es erscheint höchstens zwei Mal Zahl;

(e) Es erscheint zwei oder drei Mal Zahl.

(3) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne nach der Herstellung defekt ist, beträgt 0,02. Eine Firma bestellt 800 Glühbirnen. Bestimme die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(a) Genau 20 Glühbirnen sind defekt.

(b) Höchstens 12 Glühbirnen sind defekt.

(c) Weniger als 10 Glühbirnen sind defekt.

(d) Mehr als 15 Glühbirnen sind defekt.

(e) Mehr als 10 und weniger als 20 Glühbirnen sind defekt.

(f) Unter den ersten 100 Glühbirnen sind höchstens 4 defekt.

(g) Unter den ersten 400 sind höchstens 10, unter den letzten 400 höchstens 8 defekt.

4. Hypothesentests

Wie kann man nachprüfen, dass eine Münze ideal, die Wahrscheinlichkeit für Zahl also gleich $\frac{1}{2}$ ist? Man könnte sie 10 Mal werfen; aber was wenn dann 10 Mal Zahl kommt? Die Wahrscheinlichkeit, dass dies bei einer idealen Münze passiert, ist klein, mämlich gleich $(\frac{1}{2})^{10} = \frac{1}{1024} \approx 0{,}001$. Aber wenn man hinreichend oft eine ideale Münze 10mal wirft, wird das irgend wann einmal passieren. Mit Hilfe von Zufallsexperimenten wird man also nicht beweisen können, dass eine Münze ideal ist; man wird das nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit behaupten können.

Man könnte etwa ein Wahrscheinlichkeitsexperiment wie oben machen und festlegen, dass man nicht glaubt, die Münze sei ideal, wenn das beobachtete Ergebnis unwahrscheinlich ist. Was dabei als „unwahrscheinlich“ gilt, wird vorher (mehr oder wenig beliebig) festgelegt; üblich sind etwa Grenzen um die 5 %.

Ein typischer Hypothesentest sieht also so aus: Gegeben ist eine Behauptung (Nullhypothese), etwa dass die Wahrscheinlichkeit, mit einer bestimmten Münze Zahl zu werfen, mindestens 0,6 ist. Man führt dann einen Test durch, indem man diese Münze beispielsweise $n = 100$ Mal wirft. Wenn die Annahme richtig ist, erwartet man, dass mindestens 60 Mal Zahl erscheint. Wenn also 60 mal (oder öfter) Zahl erscheint, wird man der Behauptung glauben.

Es ist aber nicht sinnvoll, die Behauptung abzulehnen, wenn 59 Mal Zahl kommt; schließlich ist, wenn X die Anzahl der geworfenen Zahlen bezeichnet,

$$p(X = 59) \approx 0{,}079.$$

Und dass weniger als 60 mal Zahl kommt, hat entsprechend eine Wahrscheinlichkeit von

$$p(X \leq 59) \approx 0{,}457.$$

In fast der Hälfte aller Fälle wird man also weniger als 60 Mal Zahl werfen. Das ist alles andere als unwahrscheinlich.

Wir legen also, bevor wir den Versuch machen, ein *Signifikanzniveau* fest, etwa $\alpha = 5$ %. Wenn das Ergebnis des Versuchs dann unwahrscheinlicher ist also diese 5 %, dann lehnen wir die Nullhypothese $p \geq 0{,}6$ ab. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit nehmen wir dabei $p = 0{,}6$ an.

Die Sache sieht jetzt also so aus:

- Wir haben die Nullhypothese $p \geq 0{,}6$: behauptet wird, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der Münze Zahl zu werfen, mindestens 0,6 ist.
- Wir machen einen Test mit einer Stichprobe von $n = 100$ Versuchen.
- Wir legen das Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ fest und bestimmen k so, dass $p(X \leq k) < \alpha$, aber $p(X \leq k+1) \geq \alpha$ ist.
- Kommt Zahl höchstens k Mal, lehnen wir die Behauptung ab.

Jetzt wird gerechnet: Wir bestimmen nacheinander die Wahrscheinlichkeiten $p(X \leq k)$ für verschiedene Werte von k, und zwar so lange, bis wir dasjenige k gefunden haben, bei welchem diese Wahrscheinlichkeit unter $\alpha = 0{,}05$ fällt. Wir beginnen mit $k = 55$; wegen $p(X \leq 55) \approx 0{,}179$ ist dieses k aber noch zu groß. Auch $p(X \leq 52) \approx 0{,}064$ ist noch zu groß, aber $p(X \leq 52) \approx 0{,}042$ liegt unterhalb des Signifikanzniveaus. Wir halten fest:

k	$p(X \leq k)$
52	0,064
51	0,042

Wenn also die Stichprobe höchstens 51 Zahlen ergibt, dann sagen wir, das sei (unter der Annahme, dass $p \geq 0{,}6$ ist) unwahrscheinlich, und lehnen die Nullhypothese ab; kommt mindestens 52 Mal Zahl, lehnen wir die Nullhypothese nicht ab. Man nennt hier $[0; 51]$ den *Ablehnungsbereich*; die *Entscheidungsregel* lautet:

> *Wenn höchstens 51 Mal Zahl erscheint, wird die Nullhypothese abgelehnt, andernfalls nicht.*

Natürlich zieht man bei Hypothesentests mit $\alpha = 0{,}05$ in etwa einem von 20 Fällen den falschen Schluss und lehnt die Hypothese ab, obwohl sie richtig ist. Die einzige Möglichkeit, falsche Folgerungen zu vermeiden, ist eine häufige Wiederholung des Tests. Bei Studien zur Wirsamkeit von Impfstoffen und Medikamenten kommt man mit einem großen Signifikanzniveau und einer kleinen Stichprobe nicht arg weit.

Bei Aufgaben zu Hypothesentests muss man also

- die Nullhypothese,
- die Stichprobengröße n und

- das Signifikanzniveau α

ablesen. Lautet die Nullhypothese $p > p_0$ für eine Wahrscheinlichkeit p_0, behauptet man also, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer groß ist, dann wird die Hypothese abgelehnt, wenn man wenig Treffer erhält; der Ablehungsbereich $[0; k]$ wird dann mit $p(X \le k) < \alpha$ bestimmt. Lautet die Nullhypothese $p < p_0$, behauptet man also, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer klein ist, dann wird die Hypothese abgelehnt, wenn man viele Treffer erhält; der Ablehungsbereich $[k; n]$ wird dann mit $p(X \ge k) < \alpha$ bestimmt (Merke: was im Ablehnungsbereich liegt, ist unwahrscheinlich). Die bisher besprochenen Tests nennt man einseitige Hypothesentests.

Beispiel. (Abitur BW 2019)

Man vermutet, dass das mittlere Rad an einem Glückautomaten zu selten ein Sternsymbol zeigt. Deshalb wird die Nullhypothese „Das mittlere Rad zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\frac{2}{5}$ ein Sternsymbol“ getestet. Man vereinbar ein Signifikanzniveau von 3 % und einen Stichprobenumfang von 300 Drehungen. Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Sei X die Anzahl der gedrehten Sterne; die Nullhypothese ist $p \ge \frac{2}{5}$, also wird abgelehnt, wenn zu wenig Sterne erscheinen, Bei $p = \frac{2}{5}$ wird man $E = n \cdot p = 300 \cdot \frac{2}{5} = 120$ Sterne erwarten. Die Bedingung dafür, dass $[0; k]$ der Ablehnungsbereich ist, ist $p(X \le k) < \alpha$ und $p(X \le k+1) > \alpha$. Wir berechnen also $p(X \le k$ für verschiedene $k \le 120$ und finden

k	$p(X \le k)$
103	0,025
104	0,033

Also ist der Ablehungsbereich $[0; 103]$, und die Entscheidungsregel lautet:

> *Erscheint das Sternsymbol höchstens 103 Mal, wird die Nullhypthese abgelehnt; sonst nicht.*

Aufgaben

(1) (Abitur BW 2020)

Ein Muschelzüchter hat eine neue Zuchtmethode entwickelt. Er behauptet, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Muschel eine Perle hervorbringt, zu erhöhen. Um die Behauptung zu überprüfen, wird die Nullhypothese „Mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 30 % bringt eine Muschel eine Perle hervor“ getestet. Man vereinbart einen Stichprobenumfang von 200 Muscheln und ein Signifikanzniveau von 5 %.

Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

(Antwort: Ablehnungsbereich $[72; 200]$)

(2) (Abitur BW 2018)

Die Ergebnisse der Versuche lassen die Vermutung aufkommen, dass der Affe die Zifferntasten gegenüber den Buchstabentasten bevorzugt. Daher wird die Nullhypothese „Der Affe tippt mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 40 % eine Zifferntaste“ mit einer Stichprobe von 80 Tastaturanschlägen auf einem Signifikanzniveau von 1 % überpüft.

Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

(Antwort: Ablehnungsbereich $[43; 80]$)

(3) (Abitur BW 2017)

Es wird vermutet, dass der Anteil p der weißen Autos zugenommen hat. Um dies zu überprüfen, wird die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0{,}151$ auf dem Signifikanzniveau 10 % getestet. Dazu werden die Farben von 500 Autos erfasst.

Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

(Antwort: Ablehnungsbereich $[87; 500]$)

5. Hinweise

Aufgabe 4. a) Ein Würfel wird dreimal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A man wirft nur gerade Zahlen

Die einzelnen Pfade aufzuschreiben ist zu lästig. Stattdessen kümmert man sich nur um gerade und ungerade Zahlen; offenbar ist die Wahrscheinlichkeit $p(g)$, eine gerade Zahl zu würfeln, gleich $p(g) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, und entsprechend ist $p(u) = \frac{1}{2}$. Jetzt ist $p(ggg) = p(g) \cdot p(g) \cdot p(g) = \frac{1}{8}$.

Bitte auf jeden Fall den Pfad „ggg“ hinschreiben!

B Die Augensumme ist mindestens 4

Die Augensumme bei dreimaligem Würfeln liegt zwischen 3 und 18; man wird also das Gegenereignis benutzen:

$$p(AS \geq 4) = 1 - p(AS = 3) = 1 - p(111) = \frac{215}{216}.$$

C Man wirft genau eine 6

Hier ist, wenn $\not{6}$ für keine 6 steht,

$$p(\text{genau eine } 6) = p(6\not{6}\not{6}) + p(\not{6}6\not{6}) + p(\not{6}\not{6}6) = 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{72}.$$

Man kann natürlich auch die Binomialverteilung benutzen: Wenn X die Anzahl der gewürfelten 6en bezeichnet, geht es um

$$p(X = 1) = \binom{3}{1} \Big(\frac{1}{6}\Big)^1 \Big(\frac{5}{6}\Big)^2 = \frac{25}{72}.$$

D Man wirft mindestens eine 6

Auch hier empfiehlt sich das Gegenereignis:

$$p(\text{mind. eine } 6) = 1 - p(\text{keine } 6) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{91}{216}.$$

b) Wie oft müsste man den Würfel mindestens werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,9 % mindestens einmal keine 6 zu erhalten?

Aufgaben mit „Wie oft muss man“ laufen auf den Logarithmus oder Probieren hinaus.

Sei X die Anzahl der geworfenen Nichtsechser. Es geht um die Wahrscheinlichkeit $p(X \geq 1)$ (mindestens einmal keine 6), und diese soll mindestens 0,999 sein:

$$p(X \geq 1) \geq 0{,}999.$$

Wie immer in solchen Situationen nimmt man hier das Gegenereignis:

$$1 - p(X = 0) \geq 0{,}999, \quad \text{d.h.,} \quad p(X = 0) \leq 0{,}001.$$

Die Wahrscheinlichkeit für keine Nichtsechs, also lauter 6en, ist bei n-maligem Werfen

$$p(X = 0) = \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

Wir müssen n so groß wählen, dass $(\frac{1}{6})^n < 0{,}001$ wird. das macht man entweder mit Probieren (geht meist sehr schnell), oder man löst die Gleichung $(\frac{1}{6})^n = 0{,}001$ mit dem Logarithmus und rundet auf (die Frage heißt wie oft man *mindestens* würfeln muss, nicht *ungefähr*).

Probieren:

n	$p(X = 0)$
1	$\frac{1}{6} \approx 0{,}167$
2	$\frac{1}{36} \approx 0{,}028$
3	$\frac{1}{216} \approx 0{,}0046$
4	$\frac{1}{1296} \approx 0{,}00077.$

In der Reinschrift behält man die Werte $n = 3$ und $n = 4$ (zwischen denen springt die Wahrscheinlichkeit unter 0,001). Man muss also mindestens viermal würfeln.

Logarithmus:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{6}\right)^n &= 0{,}001 \\ n \ln(\tfrac{1}{6}) &= \ln(0{,}001) \\ n &\approx \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(\frac{1}{6})} \end{aligned}$$

Also ist $n \approx 3{,}85$. Aufrunden: Mindestens viermal würfeln.

Aufgabe 5. a) sollte klar sein:

- $p(A) = p(wr) + p(rw) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = 0{,}48.$
- $p(B) = 1 - p(ww) = 1 - \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = 0{,}84.$

b) Auch hier geht Probieren: man legt zuerst eine weiße rein und hat dann 5 weiße und 6 rote; die Wahrscheinlichkeit wird berechnet wie in a). Wenn sie nicht 0,64 ist, rechnen wir mit 6 weißen und 6 roten usw.

Ohne Probieren: sind nach dem Dazulegen n weiße und 6 rote drin, dann soll $1 - p(ww) = 0{,}64$ sein, also $p(ww) = 0{,}36$. Wir finden

$$p(ww) = \frac{n}{n+6} \cdot \frac{n}{n+6} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}.$$

Also muss

$$\frac{n}{n+6} = \frac{3}{5}$$

sein, und das ergibt $n = 9$. Man muss also 5 weiße Kugeln dazulegen.

c) Die Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedene Farben bei n weißen und 6 roten ist

$$p(A) = p(wr) + p(rw) = \frac{n}{n+6} \cdot \frac{6}{n+6} \cdot 2 = \frac{12n}{(n+6)^2}.$$

Probieren:

n	4	5	6	7
$p(A)$	$\frac{12}{25} = 0{,}48$	$\frac{60}{121} \approx 0{,}496$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{84}{169} \approx 0{,}497$

Die Wahrscheinlichkeit ist maximal bei 6 weißen Kugeln; man muss also zwei dazulegen.

Beachte: Probieren ist im Abitur immer dann erlaubt, wenn es um *diskrete* Werte geht, also um Anzahlen. Soll die Wahrscheinlichkeit p gefunden werden, muss man rechnen.

Rechnen: Die Funktion

$$p(n) = \frac{12n}{(n+6)^2}$$

soll maximal werden. Also ist

$$p'(n) = \frac{12(n+6)^2 - 12n \cdot 2(n+6)}{(n+6)^4} = \frac{12(n+6) - 24n}{(n+6)^3} = 0.$$

Dies führt auf $12(n+6) = 24n$, also $12n + 6 \cdot 12 = 24n$ und damit $6 \cdot 12 = 12n$, also $n = 6$. Folglich muss man zwei weiße Kugeln dazulegen. Ohne Quotientenregel kommt man aus, wenn man mit der unbekannten Wahrscheinlichkeit $p = \frac{n}{n+6}$ für eine weiße Kugel rechnet, denn dann muss man $f(p) = 2p(1-p)$ maximal machen; Ableitung gleich 0 setzen ergibt $p = 0{,}5$, also $n = 6$.

Aufgabe 6. a) A verwirft mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{3}{5}$, B mit $q = \frac{1}{5}$. Damit das Spiel unentschieden ausgeht, müssen beide verwerfen:

$$p = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{625} = 0{,}0144.$$

b) Es geht um $p(V_AV_BV_AV_B) + p(V_AV_BV_AT_B)$, wobei V für Verwerfen und T für Treffen steht. Man findet also

$$p = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{9}{125}.$$

Etwas schneller geht es so: genau dann wird viermal geworfen, wenn die ersten drei Bälle daneben gehen. Dies passiert mit Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{125}.$$

c) Die Anzahl der Würfe beträgt 1, 2, 3 oder 4.

A	1	2	3	4
Pfad	T_A	V_AT_B	$V_AV_BT_A$	$V_AV_BV_A$
p	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{6}{125}$	$\frac{9}{125}$

Kontrolle: $\frac{2}{5} + \frac{12}{25} + \frac{6}{125} + \frac{9}{125} = 1$.
Erwartungswert:

$$E(A) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{12}{25} + 3 \cdot \frac{6}{125} + 4 \cdot \frac{9}{125} = \frac{224}{125} = 1{,}792.$$

Im Schnitt wird etwa 1,8 Mal geworfen.

d) Wir nehmen an, Bo treffe mit Wahrscheinlichkeit p; er wirft dann mit Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$ daneben. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind jetzt

$$\begin{aligned} p(T_A) &= \frac{2}{5} & p(V_AT_B) &= \frac{3}{5}p \\ p(V_AV_BT_A) &= \frac{3}{5} \cdot q \cdot \frac{2}{5} & p(V_AV_BV_AT_B) &= \frac{3}{5} \cdot q \cdot \frac{3}{5} \cdot p \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Alex gewinnt, muss bei einem fairen Spiel genauso groß sein wie die, dass Bo gewinnt. Es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot q \cdot \frac{2}{5} &= \frac{3}{5} \cdot p + \frac{3}{5} \cdot q \cdot \frac{3}{5} \cdot p & &\Big|\ q = 1-p \\ \frac{2}{5} + \frac{6}{25}(1-p) &= \frac{3}{5} \cdot p + \frac{9}{25} \cdot (1-p)p & &\Big|\ \cdot 25 \\ 10 + 6 - 6p &= 15p + 9p - 9p^2 & &\Big|\ + 9p^2 - 24p \\ 9p^2 - 30p + 16 &= 0 \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösung $p_1 = \frac{2}{3}$ und $p_2 = \frac{8}{3}$. Weil Wahrscheinlichkeiten ≤ 1 sind, muss $p = \frac{2}{3}$ sein.

Binomialkoeffizienten.

(1) Berechne die folgenden Binomialkoeffizienten.

a) $\binom{4}{2} = 6$ b) $\binom{5}{1} = 5$

c) $\binom{6}{3} = 20$ d) $\binom{8}{2} = 28$

(2) Eine ideale Münze wird 5-mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse von Hand und mit WTR.

(a) Es erscheint 5-mal Zahl;

$$p(ZZZZZ) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}.$$

(b) Es erscheint genau einmal Zahl;

$$p = \binom{5}{1} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

(c) Es erscheint genau drei Mal Zahl, und zwar hintereinander;

$$p = (ZZZWW) + p(WZZZW) + p(WWZZZ) = \frac{3}{32}.$$

(d) Es erscheint höchstens zwei Mal Zahl;

Die Anzahl der Pfade ist $1 + 5 + \binom{5}{2} = 1 + 5 + 10 = 16$. Die Wahrscheinlichkeit ist also $p = 16 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$.

(e) Es erscheint zwei oder drei Mal Zahl.

Die Anzahl der Pfade ist $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$. Also ist die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$.

(f) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne nach der Herstellung defekt ist, beträgt 0,02. Eine Firma bestellt 800 Glühbirnen. Bestimme die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(i) Genau 20 Glühbirnen sind defekt.

(ii) Höchstens 12 Glühbirnen sind defekt.

(iii) Weniger als 10 Glühbirnen sind defekt.

(iv) Mehr als 15 Glühbirnen sind defekt.

(v) Mehr als 10 und weniger als 20 Glühbirnen sind defekt.

(vi) Unter den ersten 100 Glühbirnen sind höchstens 4 defekt.

(vii) Unter den ersten 400 sind höchstens 10, unter den letzten 400 höchstens 8 defekt.

Offenbar liegt hier Binomialverteilung vor (nur zwei Möglichkeiten, Wahrscheinlichkeiten für defekte sind immer gleich). Sei daher X die Anzahl der defekten Glühbirnen; X ist binomialverteilt mit $n = 800$ und $p = 0{,}02$ (die Definition von X ist Pflicht, sonst gibt es Punktabzug).

(i) Genau 20 Glühbirnen sind defekt: zu berechnen ist $p(X = 20)$; mit dem WTR Binomialverteilung aufrufen und $n = 800$, $p = 0{,}02$ und $k = 20$ eingeben; dies ergibt $p(X = 20) \approx 0{,}056$.

(ii) Höchstens 12 Glühbirnen sind defekt. Hier geht es um $p(X \leq 20)$ (Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl X der defekten Glühbirnen ≤ 20 ist). WTR, kumulative Binomialverteilung, $n = 800$, $p = 0{,}02$ und $k = 20$ eingeben. Das liefert $p(X \leq 20) = 0{,}049$.

(iii) Weniger als 10 Glühbirnen sind defekt. $p(X < 10) = p(X \leq 9) \approx 0{,}023$.

(iv) Mehr als 15 Glühbirnen sind defekt. Mit Gegenereignis: $p(X > 15) = p(X \geq 15) = 1 - p(X \leq 14) \approx 1 - 0{,}0205 = 0{,}9795$.

(v) Mehr als 10 und weniger als 20 Glühbirnen sind defekt. Die Anzahl der defekten Glühbirnen liegt zwischen 10 und 20; er geht also um $p(10 < X < 20) = p(11 \leq X \leq 19)$. Dafür muss man von der Wahrscheinlichkeit $p(X \leq 19)$ die Wahrscheinlichkeit $p(X \leq 10)$ abziehen, weil dann alle X mit $11 \leq X \leq 19$ übrig bleiben. Es ist also $p(11 \leq X \leq 19) = p(X \leq 19) - p(X \leq 10) \approx 0{,}04565 - 0{,}00422 = 0{,}04143 \approx 0{,}0414$.

(vi) Unter den ersten 100 Glühbirnen sind höchstens 4 defekt. Hier ist die Anzahl Y der defekten Glühbirnen binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}02$. Also $p(Y \leq 4) \approx 0{,}053$.

(vii) Unter den ersten 400 sind höchstens 10, unter den letzten 400 höchstens 8 defekt.

Sei X die Anzahl defekter Glühbirnen unter den ersten 400, Y die unter den letzten 400. Dann sind beide binomialverteilt mit $n = 400$ und $p = 0{,}02$, und es ist $p(X \leq 10) \approx 0{,}0458$ und $p(Y \leq 8) \approx 0{,}033$. Weil es um einen Pfad geht (die ersten 400 und dann die letzten 400), werden die Wahrscheinlichkeiten multipliziert. Die gesuchte $p(X \leq 10) \cdot p(Y \leq 8) \approx 0{,}0458 \cdot 0{,}033 \approx 0{,}0015$.

Abitur BW 2020. Ich werde jetzt den Hypothesentest aus dem letzten Abi auseinandernehmen und noch einmal zeigen, wie man vorgeht.

Zuerst erkläre ich das allgemeine Schema; ihr lest die Aufgabe durch und beantwortet die folgenden Fragen:

- Was zählt die Zufallsvariable?
- Was ist die Nullhypothese?
- Wie groß ist das Signifikanzniveau α?
- Wie groß ist die Stichprobe n?

Wir lesen also:

> *Ein Muschelzüchter hat eine neue Zuchtmethode entwickelt. Er behauptet, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Muschel eine Perle hervorbringt, zu erhöhen.*

Es geht also um Muscheln, die Perlen hervorbringen. Wir schreiben:

- X ist die Anzahl der Muscheln, die Perlen hervorbringen. X ist binomialverteilt.

Binomialverteilung deswegen, weil es nur zwei Möglichkeiten gibt (Perle oder keine Perle) und die Wahrscheinlichkeit für jede Muschel dieselbe ist. Oder weil Hypothesentest bei uns nur im Zusammenhang mit der Binomialverteilung drankommt.

Weiter im Text:

> *Um die Behauptung zu überprüfen, wird die Nullhypothese „Mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 30 % bringt eine Muschel eine Perle hervor“ getestet. Man vereinbart einen Stichprobenumfang von* 200 *Muscheln und ein Signifikanzniveau von 5 %.*

Da steht jetzt alles drin, was wir wissen müssen:

- Nullhypothese: Die Wahrscheinlichkeit p, dass eine Muschel einer Perle hervorbringt, ist höchstens 30 %. Wir schreiben:

  $H_0 : p \leq 0{,}3$.

- Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$.
- Stichprobenumfang $n = 200$.

Jetzt kommt die einzige Stelle, an der man was tun muss: Die Behauptung ist, dass die Wahrscheinlichkeit, eine Perle hervorzubringen, klein ist (nämlich höchstens 0,3). Man wird diese Behauptung also ablehnen, wenn zu viele Muscheln der Stichprobe eine Perle hervorbringen. Abgelehnt wird also bei einer *großen* Trefferzahl.

Schema:

- Ist $H_0 : p \leq 0{,}3$, muss man $p(X \geq k) < \alpha$ betrachten.

  Ablehnungsbereich hat die Form $[k; 200]$ (das Intervall aller Zahlen von k bis 200; abgelehnt wird, wenn die Anzahl der Treffer zwischen k und 200 liegt).

- Ist $H_0 : p \geq 0{,}3$, muss man $p(X \leq k) < \alpha$ betrachten.

  Ablehnungsbereich hat die Form $[0; k]$.

Noch einmal: wenn die Behauptung ist, die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer sei klein, dann wird abgelehnt, wenn es viele Treffer gibt; wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer dagegen groß sein soll, wird abgelehnt, wenn es zu wenig Treffer gibt.

In unserem Fall lautet die Behauptung, dass höchstens 30 % der Muscheln Perlen hervorbringen; man lehnt also ab, wenn von den 200 Muscheln *viele* Perlen haben. Zu erwarten sind bei 200 Muscheln insgesamt $200 \cdot 0{,}3 = 60$ Perlen mit Muscheln. Wenn so viele dabei sind, wird man natürlich nicht ablehnen. Wenn es wenig mehr als 60 sind, glaubt man die Nullhypothese immer noch. Wenn es 150 Muscheln mit Perlen sind, glaubt man aber nicht mehr, dass höchstens 30 % eine Perle haben. Der Ablehnungsbereich ist also rechts: $A = [k, 200]$ soll bedeuten, dass man ab k Muscheln mit Perlen ablehnt. Um dieses k zu bestimmen, macht man den Ansatz

$$p(X \geq k) < \alpha = 0{,}05.$$

Man lehnt also ab, wenn die Wahrscheinlichkeit für mindestens k Muscheln mit Perlen unter die 5 % fällt.

Jetzt muss man probieren, um das richtige k zu finden. Der Erwartungswert von 60 Muscheln sagt uns, dass k größer als 60 sein muss, aber mehr wissen wir bis jetzt nicht. Also fragt man den WTR. Weil der aber nur $p(X \leq k)$ einprogrammiert hat, müssen wir umdenken: Damit $p(X \geq k) < 0{,}05$ ist, muss $p(X \leq k-1) > 0{,}95$ sein. Wir machen uns eine Tabelle und suchen das richtige k; am Ende schreiben wir aber nur zwei Werte für k in die Reinschrift, nämlich diejenigen, bei denen die Wahrscheinlichkeit über die 95 % springt. Wir haben also $n = 200$, $p = 0{,}3$, und k probieren wir durch:

$$\begin{aligned} p(X \leq 65) &= 0{,}803 \\ p(X \leq 68) &= 0{,}904 \\ p(X \leq 70) &= 0{,}947 \\ p(X \leq 71) &= 0{,}960 \end{aligned}$$

Zwischen 70 und 71 springt die Wahrscheinlichkeit also über die 0,95. Allerdings muss man aufpassen, denn beim Gegenereignis haben wir ja k durch $k-1$ ersetzt. Wir schreiben die beiden Zeilen also noch einmal ordentlich auf:

$$p(X \geq 71) = 1 - p(X \leq 70) = 0{,}054$$
$$p(X \geq 72) = 1 - p(X \leq 71) = 0{,}039$$

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 72 Muscheln mit Perlen zu finden, liegt also unter dem Signifikanzniveau von 5 %, ist damit so unwahrscheinlich, dass man die Nullhypothese ablehnt. Der Ablehnungsbereich ist daher $A = [72; 200]$ (wenn die Anzahl der Muscheln mit Perle da reinfällt, glaubt man nicht mehr, dass die Wahrscheinlichkeit nur 30 % ist). Damit haben wir die

Entscheidungsregel.

> *Wenn mindestens* 72 *der Perlen aus der Stichprobe eine Perle haben, wird die Nullhypothese abgeleht; sonst nicht.*

Noch einmal das Schema:

- Was zählt die Zufallsvariable X?
- Was ist die Nullhypothese?
- Wie groß ist das Signifikanzniveau α?
- Wie groß ist die Stichprobe n?
- Ansatz für den Ablehnungsbereich:

$H_0 : p \geq p_0$	$A = [0; k]$	$p(X \leq k) < \alpha$
$H_0 : p \leq p_0$	$A = [k; n]$	$p(X \geq k) < \alpha$

- Entscheidungsregel formulieren.