

# ÜBUNGSARBEIT WAHLTEIL

FRANZ LEMMERMEYER

Abituraufgaben aus Hamburg gehören zum Miserabelsten, was die moderne Didaktik hervorgebracht hat. Also nicht wundern, sondern erstmal herausfinden, wo die Aufgabe eigentlich losgeht und was die Damen und Herren mit ihren seltsamen Fragen eigentlich meinen.

**Analysis 2009.** Douglasien („Oregon pine“) stammen aus den Waldgebieten des küstennahen pazifischen Nordwestens der USA. Die Douglas-Tanne, wie sie hier genannt wird, besitzt eine hohe Widerstandsfähigkeit gegen Holz zerstörende Pilze. Ihr Holz findet daher sowohl im Außenbereich (Balkone, Gartenmöbel, Spielplatzeinrichtungen etc.) als auch im Innenbereich (Innenausbau, Möbel etc.) zunehmend Verwendung.

Grundsätzlich lässt sich das Wachstumsverhalten so beschreiben, dass nach einer anfänglichen Zunahme der Wachstumsgeschwindigkeit eine Verringerung auftritt.

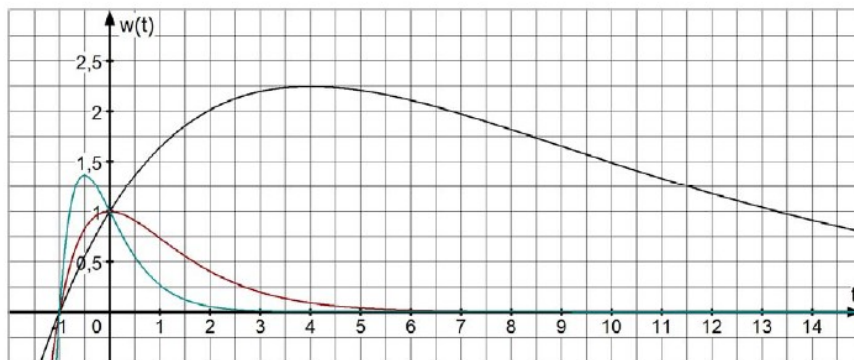
a) Die Wachstumsgeschwindigkeit  $w$  der Höhe von Nadelbäumen in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  lässt sich modellhaft durch Funktionen des Typs

$$w_a(t) = a \cdot (t + 1) \cdot e^{-kt}$$

beschreiben ( $k > 0$ ). Dabei ist  $t$  in der Einheit „Jahr“ und  $w(t)$  in der Einheit „Meter/Jahr“ angegeben.



In der folgenden Abbildung sind für  $a = 1$  drei verschiedene Graphen dieses Typs dargestellt. Berechnen Sie für jede dargestellte Funktion mit Hilfe der Maximalstellen, die Sie der Grafik entnehmen, den zugehörigen Zahlenwert  $k$ .



b) Entscheiden Sie mit Hilfe der Lage der Extrempunkte, dass nur Zahlenwerte  $k$  mit  $0 < k < 1$  für eine sinnvolle Beschreibung des Wachstumsprozesses in Frage kommen.

c) Für die Wachstumsgeschwindigkeit der Höhe von Douglasien soll nun die Funktion  $w_{0,04}$  mit

$$w_{0,04}(t) = 0,04(t + 1)e^{-0,03t}$$

betrachtet werden. Bestimmen Sie das Alter mit der höchsten Wachstumsgeschwindigkeit und geben Sie diese an.

d) Die Funktion

$$h(t) = -\frac{4}{3}e^{-0,03t} \left( t + 34\frac{1}{3} \right) + 45\frac{7}{9}$$

beschreibt modellhaft, wie sich die Baumhöhe  $h$  von Douglasien (in m) in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  (in Jahren) entwickelt.

- Zeigen Sie, dass  $h$  eine Stammfunktion von  $w_{0,04}$  ist.
- Ermitteln Sie, welche Stammhöhe eine Douglasie nach diesem Modell nicht überschreiten kann.
- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion  $h$  im Intervall  $0 < t < 300$  in ein geeignetes Koordinatensystem. Wählen Sie den Maßstab  $1 \text{ LE} \cong 20$  Jahre für die Zeitachse  $t$  und  $1 \text{ LE} \cong 5$  m für die Höhenachse  $h(t)$ .
- Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen im Kontext.

Als Kenngröße für das Dickenwachstum spielt der sogenannte Brusthöhen-durchmesser BHD, der den Durchmesser des Stammes in einer Höhe von 1,30 m angibt, eine große Rolle.

f) Berechnen Sie den BHD für eine Douglasie im Alter von 80 Jahren, wenn der Quotient aus Baumhöhe und BHD den Wert 80 aufweisen soll.

Für die Produktion von besonders hochwertigem Holz ist die Kennzeichnung und besondere Pflege (Schnitte) von sogenannten Z-Bäumen (Zukunftsbäumen) von Bedeutung. Bei diesen Bäumen wird als Ziel ein BHD-Wert von 70 bis 80 cm im Alter von 60 bis 70 Jahren angestrebt.

g) Bei einem idealen Baumtyp mit kreisrundem Stamm lässt sich der Stammlängsschnitt modellhaft durch eine Funktion  $H(r) = m \cdot e^{-br^2}$  beschreiben, wobei  $H(r)$  die Höhe angibt, in der der Stamm den Radius  $r$  aufweist (siehe Abb. 1).

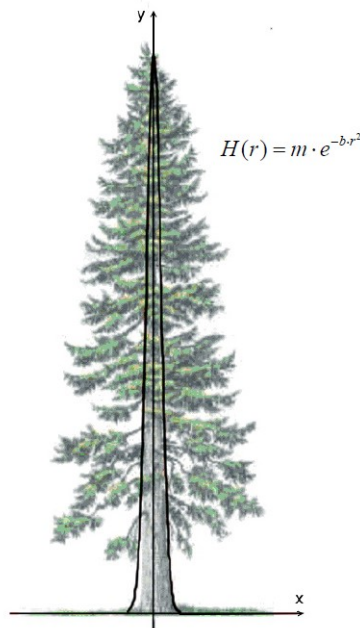


ABBILDUNG 1

- Bestimmen Sie die Parameter  $m$  und  $b$  für einen Z-Baum, der im Alter von 70 Jahren eine Höhe von 32 m erreicht und einen BHD von 70 cm hat. (Zur Kontrolle:  $m = 32$  und  $b = 26,15$ ).
- Beschreiben Sie ein Verfahren, um das Volumen eines solchen Z-Baumes im Alter von 70 Jahren unter Berücksichtigung einer Höhe von 32 m (abzüglich der Schnitthöhe von 20 cm) und einem Ziel-BHD von 70 cm näherungsweise zu ermitteln.
- Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Verfahrens das Volumen.
- Vergleichen Sie das ermittelte Volumen mit demjenigen Wert, der sich aus der praxisorientierten Formel von Johnssen berechnen lässt, und begründen Sie die Abweichungen.

Faustformel von Johnssen:

$$V = 0,03186d^2h + 0,43h + 0,0551d^2 - 0,4148d$$

mit

$V$  : Stamm-Volumen mit Rinde (in  $\text{dm}^3$ )

$d$  : BHD-Durchmesser (in cm)

$h$  : Baumhöhe (in m)