WIEDERHOLUNG ANALYSIS

FRANZ LEMMERMEYER

1. Ableitungsregeln

Niveau A

(1) Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = (1 - x + x^2)^2$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$
c) $f(x) = 2(x^2 - 3\sqrt{x}\,)^2$ d) $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

(2) Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \cos(2x)$ b) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$
c) $f(x) = (2x + 1)^3(2x - 1)^2$ d) $f_k(x) = (kx + 1)\sin(kx)$

(3) Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$ b) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$
c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}}$ d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

(4) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

a) $f(x) = 2xe^x$ b) $f(t) = 20te^{-kt^2}$
c) $f(x) = x^2e^{-2x}$ d) $f(x) = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$

(5) Geben Sie eine Stammfunktion F von f an.

a) $f(x) = x^{2n}$ b) $f(x) = (0{,}5x - 2)^4$
c) $f(x) = a^2 \sin(ax)$ d) $f(x) = x\sqrt{x}$

(6) Achtung Falle: Geben Sie eine Stammfunktion F von f an.

a) $f(x) = (1 + x^2)^2$ b) $f(x) = (1 + e^x)^2$
c) $f(x) = (e^x + e^{-x})^2$ d) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$

(7) Lösen Sie die folgenden Gleichungen.

a) $\displaystyle\int_0^b x^2\,dx = 9$ b) $\displaystyle\int_a^5 x^2\,dx = 63$

c) $\displaystyle\int_1^b 2x^3\,dx = 40$ d) $\displaystyle\int_a^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = 0{,}5$

(8) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2e^{2x+1}\,dx =$ b) $\displaystyle\int_1^3 (x + e^{-x+1})\,dx =$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 (e^x + e^{-x})^2\,dx =$ d) $\displaystyle\int_0^1 (1 + e^t)^2\,dt =$

(9) Zeigen Sie, dass die Gerade $y = ex - 2$ das Schaubild von $f(x) = \ln x$ berührt, und bestimmen Sie die Koordinaten des Berührpunkts.

(10) Welche Geraden der Form $y = x + c$ berühren das Schaubild der Funktion $f(x) = e^{2x}$?

Niveau B

(1) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{a+bx}{x^2}$ besitzt in $P(1|2)$ einen Extrempunkt. Bestimmen Sie a und b. Liegt in P ein Hoch- oder ein Tiefpunkt vor?

(2) Die Funktion g sei differenzierbar; bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = g(3x)$ b) $f(x) = g(1 - x)$

c) $f(x) = g(x^2)$ d) $f(x) = g(\frac{1}{x})$

(3) Die Funktion g sei drei Mal differenzierbar. Bestimmen Sie f' und f'' für

a) $f(x) = x \cdot g(x)$ b) $f(x) = x^2 \cdot g(x)$

c) $f(x) = g'(x)e^x$ d) $f(x) = g(x) \cdot g'(x)$

(4) Zeigen Sie, dass man die Produktregel für die Ableitung des Produkts $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ zweier differenzierbarer Funktionen u und v in der Form

$$f'(x) = \Big(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}\Big) \cdot u(x)v(x)$$

schreiben kann.

Leiten Sie eine Produktregel für die Ableitung eines Produkts $f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ her, indem Sie $f(x) = (u(x) \cdot v(x)) \cdot w(x)$ mit der Produkt- und der Kettenregel ableiten, und zeigen Sie dann, dass man das Ergebnis in der Form

$$f'(x) = \left(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{w'(x)}{w(x)}\right) \cdot u(x)v(x)w(x)$$

schreiben kann.

(5) Seien u und v differenzierbare Funktionen. Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = \ln(u(x) \cdot v(x))$ einmal direkt, ein zweites Mal unter Benutzung der Identität

$$\ln(u(x) \cdot v(x)) = \ln(u(x)) + \ln(v(x)).$$

Zeigen Sie dann, dass beide Ableitungen gleich sind.

(6) Das Schaubild einer differenzierbaren Funktion f berührt die x-Achse in $P(2|0)$. Gilt das auch für das Schaubild der Funktion

(a) $g(x) = x \cdot f(x)$?

(b) $g(x) = e^x \cdot f(x)$?

(c) $g(x) = h(x) \cdot f(x)$ für eine differenzierbare Funktion h?

(7) Sei f eine zweimal differenzierbare Funktion und $P(2|0)$ ein Hochpunkt des Schaubilds von f mit $f''(2) > 0$. Ist P dann auch Hochpunkt des Schaubilds von g mit

(a) $g(x) = x \cdot f(x)$?

(b) $g(x) = e^x \cdot f(x)$?

(c) $g(x) = h(x) \cdot f(x)$ für eine zweimal differenzierbare Funktion h?

(8) Sei $g(x) = e^{kx^2}$. Bestimme k so, dass $g'(x) = x \cdot g(x)$ ist.

(9) Sei f eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = x \cdot f(x)$. Stellen Sie f'' und f''' durch f dar.

Sei jetzt $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f an der Stelle $x = 0$ ein lokales Extremum hat. Welche Bedingung muss f erfüllen, damit es sich um ein Maximum handelt?

Zeigen Sie, dass f keinen Wendepunkt besitzt.

2. Lösungen

(1) *Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen.*

a) $f(x) = (1 - x + x^2)^2$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

c) $f(x) = 2(x^2 - 3\sqrt{x}\,)^2$

d) $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

$$
\begin{aligned}
&(a) && f'(x) = 2(1 - x - x^2)(2x - 1)\\
&(b) && f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}\\
&(c) && f'(x) = 6(x^2 - 3\sqrt{x}\,)(2x - \tfrac{3}{2\sqrt{x}}\,)\\
&(d) && f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}
\end{aligned}
$$

(2) *Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen.*

a) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \cos(2x)$

b) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

c) $f(x) = (2x + 1)^3(2x - 1)^2$

d) $f_k(x) = (kx + 1)\sin(kx)$

$$
\begin{aligned}
&(a) && f'(x) = 2x\cos(2x) - 2(x^2 + 1)\sin(2x)\\
&(b) && f'(x) = \sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}\\
&(c) && f'(x) = 6(2x + 1)^2(2x - 1)^2 + 4(2x + 1)^3(2x - 1)\\
& && = 2(2x + 1)^2(2x - 1)[3(2x - 1) + 2(2x + 1)]\\
& && = 2(2x + 1)^2(2x - 1)(10x - 1)\\
&(d) && f_k'(x) = k\sin(kx) + k(kx + 1)\cos(kx)
\end{aligned}
$$

(3) Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

$$(a) \qquad f'(x) = -\frac{2x}{(1-x)^2}$$

$$(b) \qquad f'(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$(c) \qquad f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \Big(\frac{x+1}{x-1}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{(x-1)^2}\Big)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)^2}{2}}$$

$$= \frac{x-1}{2\sqrt{2}}, \quad \text{falls } x > 1$$

$$(d) \qquad f_k'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

(4) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

a) $f(x) = 2xe^x$

b) $f(t) = 20te^{-kt^2}$

c) $f(x) = x^2e^{-2x}$

d) $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

$$(a) \qquad f'(x) = 2e^x + 2xe^x$$

$$f''(x) = 4e^x + 2xe^x$$

$$(b) \qquad f'(t) = 20e^{-kt^2} - 40kt^2e^{-kt^2}$$

$$f''(t) = -120kte^{-kt^2} + 80k^2t^3e^{-kt^2}$$

$$(c) \qquad f'(x) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x}$$

$$f''(x) = 2e^{-2x} - 8xe^{-2x} + 4x^2e^{-2x}$$

$$(d) \qquad f'(x) = \frac{-2e^x}{(1-e^x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2e^x - 4e^{2x}}{(1-e^x)^3}$$

Die zweite Ableitung bei (d) erhält man mit der Quotientenregel so:

$$u(x) = -2e^x, \qquad u'(x) = -2e^x,$$
$$v(x) = (1-e^x)^2 \qquad v'(x) = -2e^x(1-e^x)$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-2e^x(1-e^x)^2 - 2e^x \cdot 2e^x(1-e^x)}{(1-e^x)^4} \\ &= \frac{(1-e^x)[-2e^x(1-e^x) - 4e^{2x}]}{(1-e^x)^4} \\ &= \frac{-2e^x(1-e^x) - 4e^{2x}}{(1-e^x)^3} \\ &= \frac{-2e^x + 2e^{2x} - 4e^{2x}}{(1-e^x)^3} \\ &= \frac{-2e^x - 2e^{2x}}{(1-e^x)^3} \end{aligned}$$

Vermutlich verrechnet man sich weniger oft, wenn man f' umschreibt:

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}.$$

Auch das Ergebnis kann man kosmetisch behandeln:

$$f''(x) = \frac{-2e^x - 2e^{2x}}{(1-e^x)^3} = \frac{2e^x + 2e^{2x}}{(e^x-1)^3}.$$

(5) Geben Sie eine Stammfunktion F von f an.

a) $f(x) = x^{2n}$ b) $f(x) = (0{,}5x-2)^4$
c) $f(x) = a^2\sin(ax)$ d) $f(x) = x\sqrt{x}$

a) $F(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ b) $F(x) = \dfrac{2}{5}(0{,}5x-2)^5$
c) $F(x) = -a\cos(ax)$ d) $F(x) = \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$

(6) Achtung Falle: Geben Sie eine Stammfunktion F von f an.

a) $f(x) = (1+x^2)^2$ b) $f(x) = (1+e^x)^2$
c) $f(x) = (e^x+e^{-x})^2$ d) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$

$$
\begin{aligned}
(a) \qquad & f(x) = 1 + 2x^2 + x^4 \\
& F(x) = x + \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \\
(b) \qquad & f(x) = 1 + 2e^x + e^{2x} \\
& F(x) = x + 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} \\
(c) \qquad & f(x) = e^{2x} + 2 + e^{-2x} \\
& F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{2}{e}^{-2x} \\
(d) \qquad & f(x) = (\sin x)^2 + 2\sin x \cos x + (\cos x^2) = 1 + 2\sin x \cos x \\
& F(x) = x + (\sin x)^2
\end{aligned}
$$

(7) *Lösen Sie die folgenden Gleichungen.*

a) $\displaystyle\int_0^b x^2\,dx = 9$ b) $\displaystyle\int_a^5 x^2\,dx = 63$

c) $\displaystyle\int_1^b 2x^3\,dx = 40$ d) $\displaystyle\int_a^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = 0{,}5$

$$(a)\qquad \int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^b = \frac{1}{3}x^3 = 9$$
$$x_1 = 3$$
$$(b)\qquad \int_a^5 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_a^5 = \frac{125-a^3}{3} = 63$$
$$a_1 = -4$$
$$(c)\qquad \int_1^b 2x^3\,dx = \frac{1}{2}x^4\Big|_1^b = \frac{b^4-1}{2} = 40$$
$$b_{1,2} = \pm 3$$
$$(d)\qquad \int_a^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_a^{10} = \frac{1}{a} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2},$$
$$a_1 = \frac{5}{3}$$

(8) *Berechnen Sie die folgenden Integrale.*

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2e^{2x+1}\,dx =$ b) $\displaystyle\int_1^3 (x + e^{-x+1})\,dx =$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 (e^x + e^{-x})^2\,dx =$ d) $\displaystyle\int_0^1 (1+e^t)^2\,dt =$

(9) *Zeigen Sie, dass die Gerade $y = ex - 2$ das Schaubild von $f(x) = \ln x$ berührt, und bestimmen Sie die Koordinaten des Berührpunkts.*

$f'(x) = \frac{1}{x}$ muss gleich der Steigung e der Geraden sein, also $x_1 = \frac{1}{e}$. Damit ist $y_1 = e \cdot \frac{1}{e} - 2 = -1$ und $f(\frac{1}{e}) = \ln e^{-1} = -1 = y_1$. Also stimmen Funktionswerte und Steigungen überein: Berührpunkt ist damit $B(\frac{1}{e}| -1)$.

(10) *Welche Geraden der Form $y = x + c$ berühren das Schaubild der Funktion $f(x) = e^{2x}$?*

Es muss $f'(x) = 2e^{2x} = 1$ sein, also $2x = \ln\frac{1}{2}$ und damit $x_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$.

Weiter ist $y_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + c$ und $f(x_1) = e^{2x_1} = \frac{1}{2}$. Also ist $c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$.

Niveau B

(1) *Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{a+bx}{x^2}$ besitzt in $P(1|2)$ einen Extrempunkt. Bestimmen Sie a und b. Liegt in P ein Hoch- oder ein Tiefpunkt vor?*

Es ist $f(1) = a + b = 2$ und $f'(1) = -2a - b = 0$. Daraus folgt $a = -2$ und $b = 4$, also $f(x) = \frac{4x-2}{x^2} = \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}$. Daraus ergibt sich $f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3}$ und $f''(x) = \frac{8}{x^3} - \frac{12}{x^4}$, also $f''(1) = -4 < 0$: Es liegt ein Hochpunkt vor.

Alternativ:

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{4-4x}{x^3}$$

besitzt in $x = 1$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$, denn für $0 < x < 1$ sind $4 - 4x$ und x^3 positiv, für $x > 1$ ist $4 - 4x < 0$ und $x^3 > 0$.

(2) *Die Funktion g sei differenzierbar; bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:*

a) $f(x) = g(3x)$ b) $f(x) = g(1 - x)$
c) $f(x) = g(x^2)$ d) $f(x) = g(\frac{1}{x})$

(a)	$f'(x) = 3g'(3x)$
(b)	$f'(x) = -g'(1 - x)$
(c)	$f'(x) = 2xg'(x^2)$
(d)	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}g'(\frac{1}{x})$

(3) *Die Funktion g sei drei Mal differenzierbar. Bestimmen Sie f' und f'' für*

a) $f(x) = x \cdot g(x)$ b) $f(x) = x^2 \cdot g(x)$
c) $f(x) = g'(x)e^x$ d) $f(x) = g(x) \cdot g'(x)$

$$
\begin{aligned}
(a) \qquad\qquad & f'(x) = g(x) + xg'(x) \\
& f''(x) = 2g'(x) + xg''(x) \\
(b) \qquad\qquad & f'(x) = 2xg(x) + x^2 g'(x) \\
& f''(x) = 2g(x) + 4xg'(x) + x^2 g''(x) \\
(c) \qquad\qquad & f'(x) = g''(x)e^x + g'(x)e^x \\
& f''(x) = g'''(x)e^x + 2g''(x)e^x + g'(x)e^x \\
(d) \qquad\qquad & f'(x) = g'(x)g'(x) + g(x)g''(x) \\
& f''(x) = 3g'(x)g''(x) + g(x)g'''(x)
\end{aligned}
$$

(4) *Zeigen Sie, dass man die Produktregel für die Ableitung des Produkts $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ zweier differenzierbarer Funktionen u und v in der Form*

$$f'(x) = \Big(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}\Big) \cdot u(x)v(x)$$

schreiben kann.

Leiten Sie eine Produktregel für die Ableitung eines Produkts $f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ her, indem Sie $f(x) = (u(x) \cdot v(x)) \cdot w(x)$ mit der Produkt- und der Kettenregel ableiten, und zeigen Sie dann, dass man das Ergebnis in der Form

$$f'(x) = \Big(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{w'(x)}{w(x)}\Big) \cdot u(x)v(x)w(x)$$

schreiben kann.

Die Formel ist richtig wegen

$$\Big(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}\Big) \cdot u(x)v(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Für $f(x) = u(x)v(x)w(x)$ finden wir

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]w(x) + [u(x)v(x)]w'(x) \\
&= \Big(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{w'(x)}{w(x)}\Big) u(x)v(x)w(x)
\end{aligned}
$$

wie behauptet.

(5) *Seien u und v differenzierbare Funktionen. Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = \ln(u(x) \cdot v(x))$ einmal direkt, ein zweites Mal unter Benutzung der Identität*

$$\ln(u(x) \cdot v(x)) = \ln(u(x)) + \ln(v(x)).$$

Zeigen Sie dann, dass beide Ableitungen gleich sind.

Es ist

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}{u(x)v(x)}.$$

Wegen $f(x) = \ln(u(x)) + \ln(v(x)$ ist aber auch

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}.$$

Beide Formeln sind äquivalent wegen

$$\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)v(x)}{u(x)v(x)} + \frac{u(x)v'(x)}{u(x)v(x)}.$$

(6) *Das Schaubild einer differenzierbaren Funktion f berührt die x-Achse in $P(2|0)$. Gilt das auch für das Schaubild der Funktion*

(a) $g(x) = x \cdot f(x)$?

(b) $g(x) = e^x \cdot f(x)$?

(c) $g(x) = h(x) \cdot f(x)$ *für eine differenzierbare Funktion h?*

Das Schaubild von f berührt die x-Achse in $P(2|0)$ bedeutet $f(2) = 0$ und $f'(2) = 0$. Wir müssen prüfen, ob auch $g(2) = 0$ und $g'(2) = 0$ ist.

(a) Es ist $g(2) = 2f(2) = 0$ und $g'(x) = f(x) + xf'(x)$, also $g'(2) = f(2) + 2f'(2) = 0$.

(b) Es ist $g(2) = e^2 f(2) = 0$ und $g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x)$, also $g'(2) = e^2 f(2) + e^2 f'(2) = 0$.

(c) Es ist $g(2) = h(2)f(2) = 0$ und $g'(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x)$, also $g'(2) = h'(2)g(2) + h(2)g'(2) = 0$.

In allen Fällen berührt daher auch das Schaubild von g die x-Achse in $P(2|0)$.

(7) *Sei f eine zweimal differenzierbare Funktion und $P(2|0)$ ein Hochpunkt des Schaubilds von f mit $f''(2) > 0$. Ist P dann auch Hochpunkt des Schaubilds von g mit*

(a) $g(x) = x \cdot f(x)$*?*

(b) $g(x) = e^x \cdot f(x)$*?*

(c) $g(x) = h(x) \cdot f(x)$ *für eine zweimal differenzierbare Funktion h?*

Es gilt $f(2) = 0$, $f'(2) = 0$ und $f''(2) > 0$.

(a) Wir finden

$$\begin{aligned} g(2) &= 2f(2) = 0, \\ g'(x) &= f(x) + xf'(x), \quad \text{also} \\ g'(2) &= f(2) + 2f'(x) = 0, \\ g''(x) &= 2f'(x) + xf''(x), \quad \text{also} \\ g''(2) &= 2f'(2) + 2f''(2) = 2f''(2) > 0. \end{aligned}$$

Also ist P Hochpunkt des Schaubilds von g.

(b) Wir finden

$$\begin{aligned} g(2) &= e^2 f(2) = 0, \\ g'(x) &= e^x(f(x) + f'(x)), \quad \text{also} \\ g'(2) &= e^2(f(2) + f'(2)) = 0, \\ g''(x) &= e^x[f(x) + 2f'(x) + f''(x)], \quad \text{also} \\ g''(2) &= e^2 f''(2) > 0. \end{aligned}$$

Also ist P Hochpunkt des Schaubilds von g.

(c) Wir finden

$$\begin{aligned} g(2) &= h(2)f(2) = 0 \\ g'(x) &= h'(x)f(x) + h(x)f'(x), \quad \text{also} \\ g'(2) &= h'(0)f(0) + h(0)f'(0) = 0, \\ g''(x) &= h''(x)f(x) + 2h'(x)f'(x) + h(x)f''(x), \quad \text{also} \\ g''(2) &= h(2)f''(2). \end{aligned}$$

Also liegt ein Hochpunkt vor, wenn $h(2) > 0$, und ein Tiefpunkt, wenn $h(2) < 0$. Im Falle von $h(2) = 0$ kann man ohne weiteres keine Aussage treffen.

(8) *Sei $g(x) = e^{kx^2}$. Bestimme k so, dass $g'(x) = x \cdot g(x)$ ist.*

Aus $g'(x) = 2kxe^{kx^2} = xe^{kx^2}$ folgt $k = \frac{1}{2}$; damit ist dann $g'(x) = x \cdot g(x)$.

(9) *Sei f eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = x \cdot f(x)$. Stellen Sie f'' und f''' durch f dar.*

Sei jetzt $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f an der Stelle $x = 0$ ein lokales Extremum hat. Welche Bedingung muss f erfüllen, damit es sich um ein Maximum handelt?

Zeigen Sie, dass f keinen Wendepunkt besitzt.

Wir finden

$$f''(x) = (x \cdot f(x))' = f(x) + x \cdot f'(x) = f(x) + x^2 f(x) = (x^2+1)f(x),$$
$$f'''(x) = 2xf(x) + (x^2+1)f'(x) = 2xf(x) + (x^2+1)xf(x) = (x^3+3x)f(x).$$

Damit folgt

$$f'(0) = x \cdot f(x)\big|_{x=0} = 0,$$
$$f''(0) = (x^2+1)f(x)\big|_{x=0} = f(0) \neq 0.$$

Also besitzt das Schaubild von f einen Extrempunkt in $x = 0$. Dieser ist genau dann ein Hochpunkt, wenn $f(0) < 0$ ist.

Endlich folgt aus $f''(x) = (x^2+1)f(x) = 0$ mit dem Satz vom Nullprodukt $x^2 + 1 = 0$ oder $f(x) = 0$, aber beide Gleichungen haben keine reelle Lösung.