K2 MATHEMATIK KLAUSUR 2 NT

13.12.2022

Aufgabe	A.1.(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	A.2.(a)	(b)	(c)	(d)
Punkte (max)	3	2	4	3	7	3	2	3	3
Punkte									

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

Wahlteil Analysis A.1

Abbildung 1 zeigt den Graphen einer in $[0; 16]$ definierten Funktion $V(t)$. Sie beschreibt modellhaft das sich durch Zu- und Abfluss ändernde Volumen von Wasser in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit t. Dabei bezeichnen t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und V(t) das Volumen in Kubikmetern.

(a) (2 VP) Geben Sie mit Hilfe von Abbildung 1 jeweils näherungsweise das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn sowie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 450 m^3 beträgt.

(b) (2 VP) Bestimmen Sie anhand des Graphen der Funktion V näherungsweise die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

(c) (3 VP) Erläutern Sie die Gleichung $V(t+6) = V(t) - 350$ im Sachzusammenhang. Entscheiden Sie mit Hilfe der Abbildung, ob diese Beziehung für $t = 5$ gilt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

In einem anderen Becken ändert sich das Volumen des darin enthaltenen Wassers ebenfalls durch Zu- und Abfluss. Die momentane Änderungsrate des Volumens wird für $0 \leq t \leq 12$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$g(t) = 0{,}4(2t^3 - 39t^2 + 180t)$$

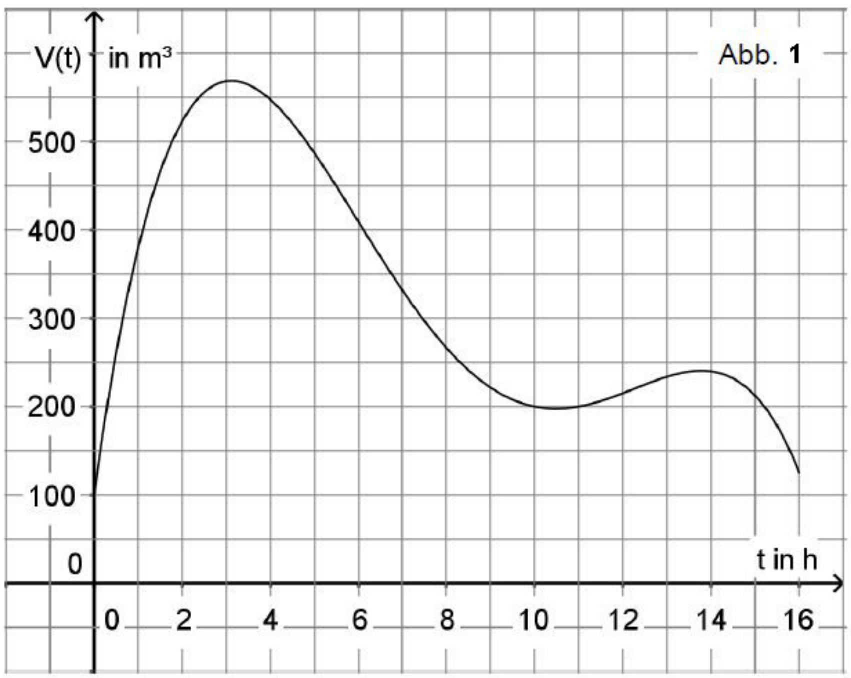
beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und g(t) die momentane Änderungsrate des Volumens in m^3/h.

(d) (2 VP) Begründen Sie, dass die Funktionswerte von g für $0 < t < 7{,}5$ positiv und für $7{,}5 < t < 12$ negativ sind.

(e) (4 VP) Erläutern Sie die Bedeutung des Werts des Integrals $\int_a^b g(t)\,dt$ für $0 \leq a < b \leq 12$ im Sachzusammenhang. Berechnen Sie das Volumen des Wassers, das sich 7,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn im Becken befindet, wenn zu Beobachtungsbeginn 150 m^3 Wasser im Becken waren.

Begründen Sie, dass es sich hierbei um das maximale Wasservolumen im Beobachtungszeitraum handelt.

Geben Sie einen integralfreien Term für das Volumen des Wassers in diesem Becken an.



A.2. Für jedes $a > 0$ und $x \geq 0$ ist die Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = a \cdot \sin(a\pi x) + a.$$

(a) Erklären Sie, wie das Schaubild von f_a aus demjenigen von $s(x) = \sin(x)$ hervorgeht.

(b) Begründen Sie, dass $f_a(x) \geq 0$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Wendepunkte von f_a mit $0 \leq x \leq \frac{1}{a}$.

(c) Bestimmen Sie a so, dass die Wendetangenten in den beiden Wendepunkten orthogonal zueinander sind.