K2 MATHEMATIK KLAUSUR 2

02.12.2022

Aufgabe	A.1.(a)	(b)	(c)	A.2.(a)	(b)	(c)
Punkte (max)	9	6	4	1	7	3
Punkte						

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

Wahlteil Analysis

A 2.1. Durch die Funktion

$$f(t) = \frac{36 \cdot e^t}{1 + e^t}$$

wird der Inhalt der Fläche beschrieben, die ein Schimmelpilz auf einer Brotscheibe bedeckt. Dabei wird t in Tagen seit Beobachtungsbeginn und $f(t)$ in cm^2 gemessen.

(a) (1 VP) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, welche der Schimmelpilz bei Beobachtungsbeginn bedeckt.

(2 VP) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu welchem 24 cm^2 vom Schimmelpilz bedeckt ist.

(4 VP) Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+2) = 1{,}2 \cdot f(t)$ im Sachzusammenhang und lösen Sie diese Gleichung.

(2 VP) Begründen Sie, dass f auch in der Form $f(t) = \frac{36}{1+e^{-t}}$ geschrieben werden kann, und dass die vom Schimmelpilz bedeckte Fläche stets kleiner als 36 cm^2 ist.

(b) (3 VP) Zeigen Sie, dass f' gegeben ist durch

$$f'(t) = \frac{36e^t}{(1+e^t)^2}.$$

(2 VP) Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Ausbreitungsgeschwindigkeit 6 cm^2/Tag ist.

(1 VP) Begründen Sie, dass die Fläche, welche der Schimmelpilz bedeckt, stets zunimmt.

(c) (1 VP) Zeigen Sie, dass

$$F(t) = 36\ln(1+e^t)$$

eine Stammfunktion von f ist.

(3 VP) Interpretieren Sie den Ausdruck

$$\frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,dt$$

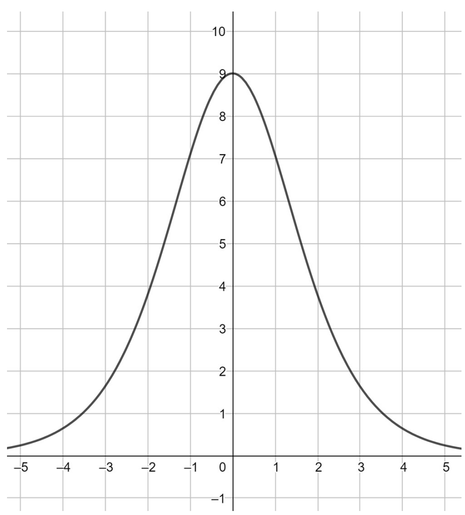
im Sachzusammenhang und berechnen Sie dessen Wert.

A 2.2. Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{(1+e^x)^2}.$$

Außerdem ist $g(x) = e^x$.

(a) (1 VP) Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f_a. Bestimmen Sie den Wert des dazugehörigen Parameters a.



(b) (4 VP) Bestimmen Sie die exakten Koordinaten des Schnittpunkts der Schaubilder von f_{36} und g.

(3 VP) Für welche Werte von a haben die Schaubilder von f_a und g einen Punkt gemeinsam?

(c) (3 VP) Zeigen Sie, dass das Schaubild von f_a symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.

Lösungen

A 2.1. Es ist $f(0) = 18$; der Schimmelpilz bedeckt bei Beobachtungsbeginn 18 cm^2.

Zeitpunkt, zu welchem 24 cm^2 vom Schimmelpilz bedeckt ist;

$$\begin{aligned} f(t) &= 24 \\ \frac{36 \cdot e^t}{1+e^t} &= 24 \\ 36e^t &= 24(1+e^t) \\ 3e^t &= 2+2e^t \\ e^t &= 2 \\ t_1 &= \ln(2) \end{aligned}$$

Nach etwa 0,7 Tagen bedeckt der Schimmelpilz 24 cm^2.

Gleichung $f(t+2) = f(t) + 8$: Nach 2 Tagen hat die Fläche um 8 cm^2 zugenommen.

$$\begin{aligned} \frac{36e^{t+2}}{1+e^{t+2}} &= 1{,}2 \cdot \frac{36 \cdot e^t}{1+e^t} \\ e^{t+2}(1+e^t) &= 1{,}2e^t(1+e^{t+2}) \\ e^{t+2} + e^{2t+2} &= 1{,}2e^t + 1{,}2e^{2t+2} \\ e^2 + e^{t+2} &= 1{,}2 + 1{,}2e^{t+2} \\ e^2 - 1{,}2 &= 0{,}2e^{t+2} \\ 5e^2 - 6 &= e^{t+2}t \qquad = \ln(5e^2-6) - 2 \approx 1{,}43. \end{aligned}$$

b) Es ist

$$f'(t) = \frac{36 \cdot e^t \cdot (1+e^t) - 36 \cdot e^t \cdot e^t}{(1+e^t)^2} = \frac{36e^t}{(1+e^t)^2}.$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit 6 cm^2/Tag:

$$\begin{aligned} \frac{36e^t}{(1+e^t)^2} &= 6 \\ 36e^t &= 6(1+e^t)^2 \\ 6e^t &= 1+2e^t+e^{2t} \\ 0 &= e^{2t} - 4e^t + 1 \end{aligned}$$

Dies führt auf $t_1 = -1{,}3$ und $t_2 = 1{,}3$; also ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit nach 1,3 Tagen gleich 6 cm^2/Tag.

Die vom Schimmelpilz bedeckte Fläche nimmt stets zu, weil $f'(t) > 0$ ist für alle t.

c) Es ist $F'(t)36 \cdot \frac{1}{1+e^t} \cdot e^t = f(t)$.

Der Ausdruck

$$\frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,dt$$

ist die mittlere Fläche, die der Schimmelpilz während der ersten vier Tage bedeckt. Wir finden

$$\frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,dt = \frac{F(4) - F(0)}{5} \approx \frac{119{,}7}{5} \approx 29{,}9.$$

Im Schnitt sind während der ersten vier Tage also 30 cm^2 bedeckt.

A 2.2. a) Einsetzen des Punkts $H(0|9)$ in f_a ergibt $9 = f_a(0) = \frac{a}{4}$, also $a = 36$.

b) Schnittpunkt: $f_{36}(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{36 \cdot e^x}{(1+e^x)^2} &= e^x \\ 36e^x &= e^x(1+e^x)^2 \\ 0 &= e^x(1+e^x)^2 - 36e^x \\ 0 &= e^x[(1+e^x)^2 - 36] \end{aligned}$$

Satz vom Nullprodukt: $e^x = 0$ hat keine Lösung.

$$\begin{aligned} (1+e^x)^2 &= 36 \\ 1+e^x &= \pm 6 \end{aligned}$$

Dies führt auf $e^x = -7$, und diese Gleichung hat keine Lösung, oder auf $e^x = 5$, also $x_1 = \ln(5) \approx 1{,}61$.

Alternativ: $0 = e^{2x} + 2e^x - 35 = (e^x - 5)(e^x + 7)$ ergibt $e^x = 5$ bzw. $e^x = -7$.

Für die y-Koordinate erhalten wir $f(\ln(5)) = e^{\ln(5)} = 5$. Also ist der Schnittpunkt $S(\ln(5)|5)$.

Entsprechend folgt

$$\begin{aligned} f_a(x) &= g(x) \\ \frac{a \cdot e^x}{(1+e^x)^2} &= e^x \\ ae^x &= e^x(1+e^x)^2 \\ 0 &= e^x(1+e^x)^2 - ae^x = e^x[(1+e^x)^2 - a] \end{aligned}$$

Also ist $(1+e^x)^2 = a$.

Methode 1. Falls $a < 0$ ist, hat diese Gleichung keine Lösung. Ist $a > 0$, so liefert Wurzelziehen $1 + e^x = \pm\sqrt{a}$. Die Gleichung $1 + e^x = -\sqrt{a}$ hat keine Lösung; die Gleichung $1 + e^x = -\sqrt{a}$ führt auf $e^x = 1 - \sqrt{a}$, und diese hat genau dann eine Lösung, wenn $1 - \sqrt{a} > 0$ ist, also für $a > 1$.

Methode 2. Ausmultiplizieren ergibt $e^{2x} + 2e^x + 1 - a = 0$; Substitution $e^x = z$ liefert $z^2 + 2z + 1 - a = 0$, also

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1-a)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4a}}{2} = -1 \pm \sqrt{a}.$$

Für $a \leq 0$ gibt es keine Lösung. Sei daher $a \geq 0$.

Das negative Vorzeichen führt auf $e^x = -1 - \sqrt{a}$: keine Lösung. Das positive Vorzeichen ergibt $e^x = -1 + \sqrt{a}$, und diese Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn $a > 1$ ist.

Also haben die Schaubilder von f_a und g genau für $a > 1$ einen Punkt gemeinsam.

c) Wir müssen zeigen, dass $f_a(-x) = f_a(x)$ ist.

$$\begin{aligned}
f_a(-x) &= f_a(x) \\
\frac{a \cdot e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} &= \frac{a \cdot e^x}{(1 + e^x)^2} \\
a \cdot e^{-x} \cdot (1 + e^x)^2 &= a \cdot e^x \cdot (1 + e^{-x})^2 \\
e^{-x} \cdot (1 + e^x)^2 &= e^x \cdot (1 + e^{-x})^2 \\
(1 + e^x)^2 &= e^{2x} \cdot (1 + e^{-x})^2 \\
1 + 2e^x + e^{2x} &= e^{2x}(1 + 2e^{-x} + e^{-2x}) = e^{2x} + 2e^x + 1
\end{aligned}$$

Also ist das Schaubild von f_a symmetrisch bezüglich der y-Achse.