K2 MATHEMATIK KLAUSUR 1

21.10.2022

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte (max)	2	2	8	3	6	9
Punkte						

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) (2 VP) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{x}.$$

(2) (2 VP) Lösen Sie die Gleichung

$$\ln(x^2 - 3e^2) = 2.$$

(3) Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = 2e^{-ax} + a$ für $a > 0$.

(a) (2 VP) Geben Sie den Wertebereich und den maximalen Definitionsbereich von f an.

(b) (2 VP) Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitung, dass f_a eine Umkehrfunktion besitzt.

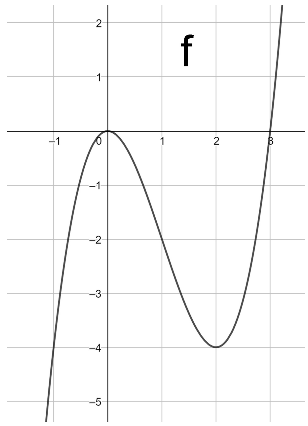
(c) (2 VP) Bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion $\overline{f_a}$ von f_a.

(d) (2 VP) Beschreiben Sie, wie das Schaubild von f_a aus demjenigen von $g(x) = e^x$ hervorgeht.

(4) (3 VP) Sei g eine ganzrationale Funktion mit $g(a) > 0$, und sei $f(x) = (x - a)^2 \cdot g(x)$.

Zeigen Sie, dass $T(a|0)$ ein Tiefpunkt von f ist.

(5) Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f.



(a) (2 VP) Beschreiben Sie (mit Begründung) Lage und Art der Extrempunkte, sowie der Wendepunkte einer Stammfunktion F von f.

(b) (1 VP) Bestimmen Sie

$$\int_0^2 f'(x)\,dx.$$

(c) (1 VP) Begründen Sie, warum F auf $]-\infty, 3]$ eine Umkehrfunktion besitzt.

(d) (2 VP) f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f.

(6) Gegeben ist die Funktion k mit $k(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

(a) (1 VP) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von k an.

(b) (2 VP) Geben Sie die Asymptoten von k an.

(c) (2 VP) Untersuchen Sie das Schaubild von k auf Symmetrie.

(d) (2 VP) Bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion von k für $x > 1$.

(e) (2 VP) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche vom Schaubild von k, der x-Achse und den Geraden $x = 2$ und $x = 4$ eingeschlossen wird.

Lösungen

(1) Es ist

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2}.$$

(2) Wir finden

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - 3e^2) &= 2 && \\ x^2 - 3e^2 &= e^2 && \Big| + 3e^2 \\ x^2 &= 4e^2 && \Big| \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm 2e && \end{aligned}$$

(3) a) Weil die Funktion $2e^{-ax}$ alle positiven Werte annimmt, ist $W_f =]a, \infty[$; maximaler Definitionsbereich ist $D_f = \mathbb{R}$. b) Wegen $f'(x) = -2ae^{-ax} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Umkehrfunktion. c) Wir finden

$$\begin{aligned} y &= 2e^{-ax} + a && \Big| - a \\ y - a &= 2e^{-ax} && \Big| : 2 \\ \tfrac{y-a}{2} &= e^{-ax} && \Big| \ln \\ \ln \tfrac{y-a}{2} &= -ax && \Big| : (-a) \\ -\tfrac{1}{a} \ln \tfrac{y-a}{2} &= x && \end{aligned}$$

Also ist

$$\overline{f}(x) = -\frac{1}{a} \ln \frac{y-a}{2}.$$

(d)

Funktion	
e^x	
e^{-x}	Spiegeln an y-Achse
e^{-ax}	Strecken mit Faktor $\frac{1}{a}$ in x-Richtung
$2e^{-ax}$	Strecken mit Faktor 2 in y-Richtung
$2e^{-ax} + a$	Verschieben um a nach oben.

(4) $f(a) = 0$ ist klar; zu zeigen ist: $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$. Es ist $f'(x) = 2(x-a)g(x) + (x-a)^2 g'(x)$ und $f''(x) = 2g(x) + 4(x-a)g'(x) + (x-a)^2 g''(x)$. Also ist $f'(a) = 0$ und $f''(a) = 2g(a) > 0$.

(5) (a) Das Schaubild von f hat eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, nämlich in $x = 3$. Also hat das Schaubild von F dort eine Extremstelle, und zwar einen Tiefpunkt, weil der Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ geht.

Außerdem hat das Schaubild von F zwei Wendepunkte, nämlich in $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$, weil das Schaubild von f dort Extrempunkte besitzt.

(b) Es ist $\int_0^2 f'(x)\,dx = f(2) - f(0) = -4 - 0 = -4$.

(c) Auf dem Intervall $]-\infty, 3]$ ist F streng monoton fallend, weil f' dort Werte negative Werte annimmt. Also besitzt F dort eine Unkehrfunktion.

(d) Es ist $f(x) = ax^2(x-3)$; Einsetzen von $(1|-2)$ liefert $-2 = -2a$, also $a = 1$ und damit $f(x) = x^2(x-3)$.

(6) (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus -1, +1\}$.

(b) $x = 1$ und $x = -1$ sind senkrechte Asymptoten; $y = 0$ ist waagrechte Asymptote.

(c) $f(-x) = \frac{1}{-x-1} - \frac{1}{-x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = f(x)$; also ist das Schaubild von f symmetrisch bezüglich der y-Achse.

(d) Wir finden

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} && \Big| \cdot (x-1)(x+1) \\
y(x-1)(x+1) &= x + 1 - (x-1) \\
y(x^2-1) &= 2 && \Big| : y \\
x^2 - 1 &= \frac{2}{y} && \Big| +1 \\
x^2 &= \frac{2}{y} + 1 = \frac{y+2}{y} && \Big| \sqrt{} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{y+2}{y}}
\end{aligned}$$

Wegen $x > 1$ ist das positive Vorzeichen zu wählen; also ist

$$\overline{f}(x) = \sqrt{\frac{y+2}{y}}$$

ein Term der Umkehrfunktion.

(e) Hier ist

$$\begin{aligned}
F &= \int_2^4 \Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big)\,dx = \ln(x-1) - \ln(x+1)\Big|_2^4 \\
&= \ln 3 - \ln 5 - (\ln 1 - \ln 3) = 2\ln 3 - \ln 5.
\end{aligned}$$