K2 MATHEMATIK KLAUSUR

27.03.2023

Aufgabe	PT	Ana	Geo	Sto	Gesamtpunktzahl
Punkte (max)	15	20	12,5	12,5	60
Punkte					
Notenpunkte					

PT	1	2	3	4	Summe
P. (max)	2,5	7	2,5	3	15
Punkte					

WT Ana	A.1 a)	b)	c)	d)	Summe
P. (max)	3	7	5	5	20
Punkte					

WT Geo	a)	b)	c)	Summe
P. (max)	8	2	2,5	12,5
Punkte				

WT Sto	a)	b)	Summe
P. (max)	7,5	5	12,5
Punkte			

WTR und Merkhilfe dürfen erst nach Abgabe des Pflichtteils benutzt werden.

Pflichtteil

(1) (2,5 VP) Die Graphen der Schaubilder von $f(x) = 2 + \frac{2}{x^2}$ und $g(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$ begrenzen mit den Geraden $x = 1$ und $x = u$ (mit $u > 1$) eine Fläche mit dem Inhalt 2. Bestimmen Sie u.

(2) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{8 - 2x}$.

(a) (3 VP) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich von f an und bestimmen Sie die Umkehrfunktion $\overline{f}(x)$ von f.

(b) (2 VP) Das Schaubild von f und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt.

(c) (2 VP) Das Integral

$$\int_a^b \overline{f}(x)\,dx$$

gibt den Inhalt derselben Fläche an. Geben Sie die dazugehörigen Werte von a und b an.

(3) (2,5 VP) Gegeben sind die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3b \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Der Abstand von g zu E ist 12. Bestimmen Sie alle möglichen Werte von a und b.

(4) Die Vierfeldertafel gehört z einem Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B. Für die Wahrscheinlichkeit p gilt $p \neq 0$.

	B	$\overline{B}$	
A	p		$2p$
$\overline{A}$			$1 - 2p$
	$3p$		

(a) (1,5 VP) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel. Zeigen Sie, dass p nicht den Wert $\frac{1}{3}$ haben kann.

(b) (1 VP) Für einen bestimmten Wert von p sind A und B stochastisch unabhängig. Bestimmen Sie diesen WErt.

Analysis

Gegeben ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = e^{ax}$ mit $a > 0$.

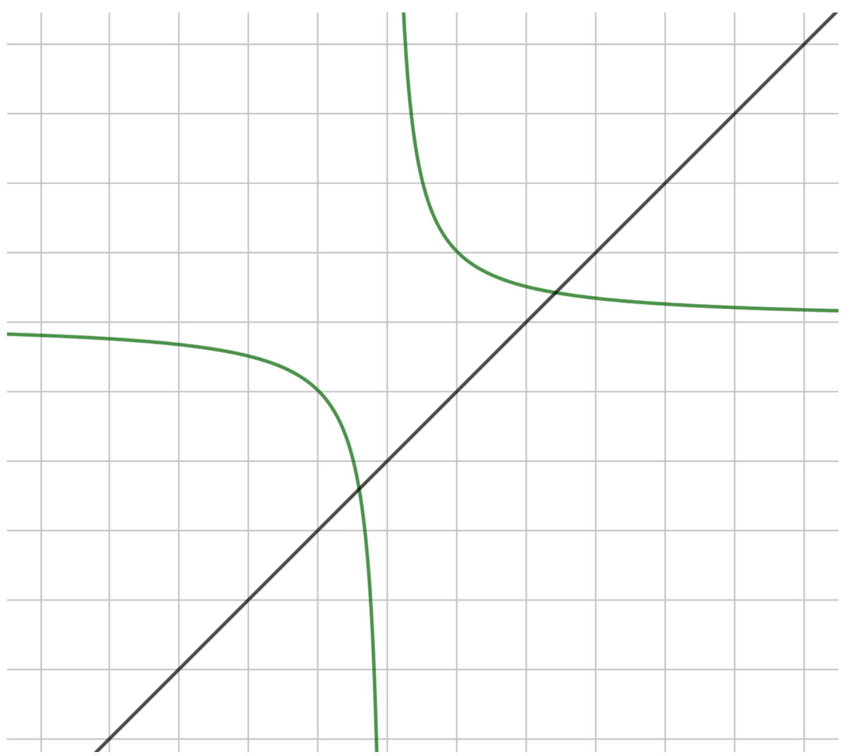
(a) (1 VP) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an das Schaubild von f_a in dessen Schnittpunkt mit der y-Achse.

(2 VP) Bestimmen Sie a so, dass das Dreieck, welche die Tangente mit den Koordinatenachsen bildet, gleichschenklig ist.

Gegeben sind weiter die Funktionen $g(x) = \frac{1}{x}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sowie $h(x) = \frac{1}{x-2} + 4$ mit maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_h$.

(b) (3 VP) Beschreiben Sie, wie das Schaubild von h aus demjenigen von g entsteht. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_h$ und die waagrechte Asymptote von h an.

(2 VP) Die folgende Abbildung zeigt das Schaubild von h und die Gerade w mit $y = x$. Zeichnen Sie die Koordinatenachsen ein und skalieren Sie diese passend.



(2 VP) Für jede Stammfunktion H von h und jedes $b > 5$ gilt

$$H(b) - H(5) \geq 4(b - 5).$$

Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung dieser Aussage und veranschaulichen Sie die Aussage graphisch.

(c) (2 VP) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion k von h.

(2 VP) Alle Schnittpunkte von h und k liegen auf der Geraden w. Bestimmen Sie die x-Koordinaten dieser Schnittpunkte.

(1 VP) Begründen Sie ohne Rechnung, dass jede Tangente mit der Steigung -1 an das Schaubild von h auch Tangente an das Schaubild von k ist.

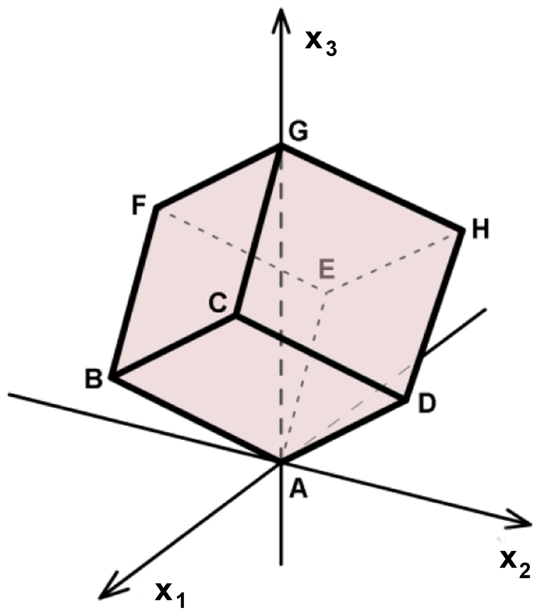
(d) Wir betrachten nun die Funktionen $f(x) = e^x$ und $g(x) = \frac{1}{x}$. Sei $u(x) = f(g(x))$ und $v(x) = g(f(x))$.

(3 VP) Geben Sie für u und v einen Funktionsterm an, und geben Sie den Wertebereich von u und v an.

(2 VP) Es ist $u'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. Bestimmen Sie die Wendestelle von u.

Geometrie

Betrachtet wird der abgebildete Würfel mit $A(0|0|0$, $B(3|-3|3)$, $G(0|0|9)$ und $H(-3|3|6)$.



(a) (1 VP) Berechnen Sie das Volumen des Würfels.

(2 VP) Begründen Sie, dass das Viereck $ABGH$ ein Rechteck ist, und zeichnen Sie es in die Abbildung ein.

(2 VP) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene L, in welcher das Viereck $ABGH$ liegt.

(1 VP) Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den die Ebene L mit der x_1x_3-Ebene bildet.

(2 VP) Sei M der Mittelpunkt der Stecke BG. Der Vektor $\overrightarrow{MF}$ steht senkrecht auf die Ebene L. Bestimmen Sie die Koordinaten von F.

(b) Die Ebene, welche die durch Mittelpunkte der Kanten BC, CG, AD und DH verläuft, teilt den Würfel in zwei Teilkörper.

(2 VP) Begründen Sie mithilfe einer Skizze, dass das Volumen des kleineren Teilkörpers ein Achtel des Volumens des Würfels ist.

(c) Die Punkte B, D und E liegen in einer Ebene parallel zur x_1x_2-Ebene. Gegeben ist die Schar der Ebenen $x_3 = k$ mit $k \in \mathbb{R}$.

(2,5 VP) Geben Sie in Abhängigkeit von k die unterschiedlichen Arten der Figuren an, in denen die Ebenen für $0 \leq k \leq 9$ den Würfel schneiden.

Stochastik

Ein Würfelspiel wird mit einem Würfel gespielt, dessen Flächen dreimal mit der Zahl 0 und je einmal mit den Zahlen 1, 2 und 3 beschriftet ist.

Der Spieler zahlt einen Einsatz von 5 Euro und würfelt dann einmal. Anschließend wird ihm die Summe aller fünf sichtbaren Zahlen in Euor ausgezahlt.

(a) Die Zufallsgröße X beschreibt den Betrag in Euro, der an den Spieler ausgezahlt wird.

(1,5 VP) Begründen Sie, dass X nur die Werte 3, 4, 5 und 6 annehmen kann.

(3 VP) Zeigen Sie, dass das Spiel fair ist.

(3 VP) Berechnen Sie den Zahlenwert, mit dem eine der drei Seitenflächen des Würfels, die mit 0 beschriftet sind, überklebt werden muss, damit das Spiel bei einem Einsatz von 7,50 Euro fair ist.

(b) Es wird 10-mal mit dem oben abgebildeten Würfel gespielt. Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Spiele, bei denen 6 Euro ausgezahlt werden.

(2 VP) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- bei mindestens 3 Spielen 6 Euro ausgezahlt werden,
- bei höchstens 6 Spielen weniger als 6 Euro ausgezahlt werden.

(1 VP) Begründen Sie ohne Rechnung, dass $P(Y = 3) = P(Y = 7)$ gilt.

(2 VP) Erläutern Sie, dass der Term $\frac{1}{3}P(Y = 9)$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass bei den 10 Spielen insgesamt 59 Euro ausgezahlt werden.

Lösungen

Pflichtteil

(1) Die Fläche hat den Inhalt

$$\int_1^u [f(x) - g(x)]\,dx = \int_1^u \frac{4}{x^2}\,dx = -\frac{4}{x}\Big|_1^u = 4 - \frac{4}{u}.$$

Aus $4 - \frac{4}{u} = 2$ folgt dann $u = 2$.

(2) (a) $D_f =]-\infty, 4] = \{x \in \mathbb{R} : x \le 4\}$; Quadratwurzeln sind ≥ 0, und offenbar wird jede positive Zahl angenommen, also ist $W_f = [0, \infty[$.

Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{8-2x} \\ y^2 &= 8 - 2x \\ 2x &= 8 - y^2 \\ x &= \frac{8-y^2}{2} \end{aligned}$$

Also ist $\overline{f}(x) = 4 - \frac{1}{2}y^2$ (für $y \ge 0$) die Umkehrfunktion von f.

(b) Wegen $f(4) = 0$ ist die Fläche

$$\int_0^4 \sqrt{8-2x}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{8-2x}^3\Big|_0^4 = \frac{1}{3}\sqrt{8}^3 = \frac{8\sqrt{8}}{3}.$$

(c) Die Fläche zwischen Schaubild von f und x-Achse ist gleich der Fläche zwischen dem Schaubild der Umkehrfunktion $\overline{f}$ und der y-Achse; bei f geht das Integral von $x = 0$ bis $x = 4$, bei $\overline{f}$ von den y-Koordinaten 0 bis $\sqrt{8}$.

In der Tat:

$$\int_0^{\sqrt{8}} (4 - \tfrac{1}{2}x^2)\,dx = 4x - \frac{1}{6}x^3\Big|_0^{\sqrt{8}} = 4\sqrt{8} - \frac{4}{3}\sqrt{8} = \frac{8\sqrt{8}}{3}.$$

(3) Damit man vom Abstand einer Geraden zu einer Ebene reden kann, muss diese parallel zur Ebene sein. Aus $0 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ folgt $a = 2$.

In diesem Fall hat jeder Punkt der Geraden denselben Abstand. Wir haben also den Abstand von $P(3b|4|2)$ zur Ebene E mit HNF $\frac{2x_1 - x_2 + 2x_3}{3} = 0$ zu bestimmen. Einsetzen liefert

$$12 = \frac{|2(3b+2t) - 6 + 2(2-t)|}{3},$$

also $36 = |6b + 4t - 4 - 2t + 4 - 2t| = |6b|$ und damit $b = \pm 6$.

Alternativ: Wir setzen den laufenden Punkt $P(3b + 2t < 4 + at|2 - t)$ in die HNF von E ein und erhalten

$$12 = \frac{|2(3b + 2t) - (4 + at) + 2(2 - t)|}{3} = \frac{|6b + t(4 - a - 2)|}{3}.$$

Dieser Abstand ist nur dann unabhängig von t, wenn $a = 2$ ist, und in diesem Fall folgt wie oben $|6b| = 12$.

(4) Vierfeldertafel ergänzen:

	B	$\overline{B}$	
A	p	p	$2p$
$\overline{A}$	$2p$	$1 - 4p$	$1 - 2p$
	$3p$	$1 - 3p$	1

Für $p = \frac{1}{3}$ ist $1 - 4p = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$ negativ, was nicht sein kann.

A und B sind stochastisch unabhängig, wenn $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ ist. Hier ist $p(A) = 2p$, $p(B) = 3p$ und $p(A \cap B) = p$. Aus $p = 2p \cdot 3p = 6p^2$ folgt wegen $p \neq 0$, dass $6p = 1$ und damit $p = \frac{1}{6}$ sein muss.

Analysis

(a) $f_a(0) = 1$, also $S(0|1)$; weiter ist $f_a'(x) = ae^{ax}$, also $m = f_a'(0) = a$. Damit ist $y = ax + 1$ die Gleichung der Tangente.

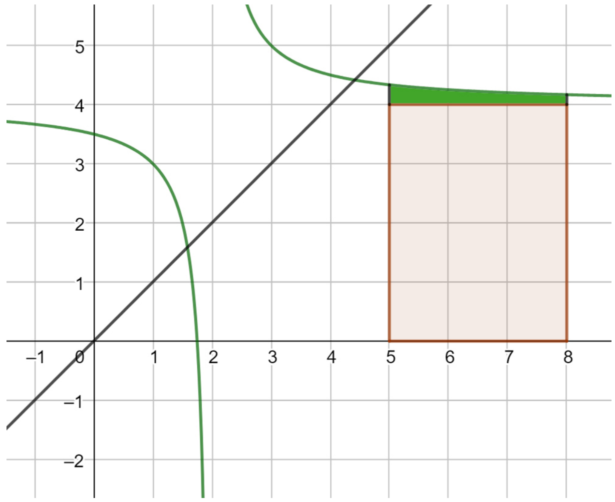
Damit das Dreieck gleichschenklig ist, muss $a = 1$ sein. Alternativ: Nullstelle der Tangente ist $x_1 = \frac{1}{a}$; gleichschenklig bedeutet $\frac{1}{a} = 1$, also $a = 1$.

Gegeben ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = e^{ax}$ mit $a > 0$.

(b) Das Schaubild wird um 2 nach rechts und um 4 nach oben verschoben. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; waagrechte Asymptote ist $y = 4$.

Gegeben sind weiter die Funktionen $g(x) = \frac{1}{x}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sowie $h(x) = \frac{1}{x-2} + 4$ mit maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_h$.

Die Asymptoten von h liegen by $x = 2$ und $y = 4$. Die Gerade $y = x$ geht durch den Ursprung.



Der Ausdruck $H(b) - H(5)$ beschreibt den Flächeninhalt zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse von $x = b$ bis $x = 5$. Der Ausdruck $4(b - 5)$ beschreibt den Flächeninhalt des Rechtecks zwischen der waagrechten Asymptote $y = 4$ und der x-Achse in diesem Bereich. Offenbar ist der Inhalt der Fläche zwischen Schaubild von f und der x-Achse größer (nämlich um den grünen Teil) als derjenige unterhalb der Asymptote.

(c) Umkehrfunktion von h:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x-2} + 4 \\ y - 4 &= \frac{1}{x-2} \\ \frac{1}{y-4} &= x - 2 \\ x &= 2 + \frac{1}{y-4} \end{aligned}$$

Also ist $\overline{f}(x) = 2 + \frac{1}{y-4}$.

Schneiden von f und der Geraden $w : y = x$ liefert $x = \frac{1}{x-2} + 4$, also $(x - 4)(x - 2) = 1$ und damit $x^2 - 6x + 7 = 0$, also $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$.

Tangenten mit Steigung -1 werden beim Spiegeln an w (also beim Übergang zur Umnkehrfunktion) fest, sind daher auch Tangenten an das Schaubild der Umkehrfunktion.

(d) Es ist

$$\begin{aligned} u(x) &= f(g(x)) = e^{\frac{1}{x}}, \\ v(x) &= g(f(x)) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}. \end{aligned}$$

Wertebereich von g ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Setzt man diese Werte in f ein, erhält man alle positiven reellen Zahlen außer $e^0 = 1$; also ist $W_u = [0{,}1[\cup]1, \infty[$.

Wertebereich von g ist offenbar $]0, \infty[$.

Wendestellen:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}} = 0$$

liefert wegen $e^{\frac{1}{x}} \neq 0$ die Gleichung $\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} = 0$, also $2x + 1 = 0$ und damit $x = -\frac{1}{2}$. Einsetzen in u ergibt $W(-\frac{1}{2}|\frac{1}{e^2})$.

Geometrie

(a) Die Kantenlänge ist $a = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, also ist $V = a^3 = 81\sqrt{3}$.

Wegen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$ liegt ein Parallelogramm vor. Wegen $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ ist es sogar ein Rechteck.

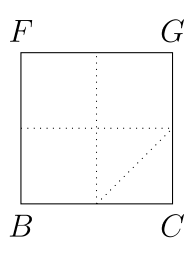
$L : \vec{x} = r\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$; Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $L : x_1 + x_2 = 0$.

x_1x_3-Ebene hat $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; man findet damit $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, also $\alpha = 45°$.

Mittelpunkt $M(1{,}5|-1{,}5|6)$. Der Vektor $\overrightarrow{MF}$ steht senkrecht auf L, ist also ein Vielfaches des Normalenvektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Weiter muss er die Länge $|\overrightarrow{BM}$ haben, also $\frac{1}{2}\sqrt{54}$. Weil $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Länge $\sqrt{2}$ hat, muss man ihn mit dem Faktor $\frac{\sqrt{54}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{27} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ strecken. Daraus folgt

$$F\Big(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\Big| - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\Big|6\Big).$$

(b) Der kleinere Teilkörper ist ein gerades Prisma. Die Grundfläche des Prismas hat ein Achtel des Inhalts der Seitenfläche BFCG:



Prisma und Würfel haben dieselbe Höhe. Daraus folgt die Behauptung.

(c) Für $0 < k \leq 3$ und $6 \leq k < 9$ ist die Schnittfläche ein Dreieck, für $3 < k < 6$ ein Sechseck.

Stochastik

(a) Die Summe aller Augen ist $1+2+3=6$; Wenn die Zahl n unten liegt, werden $6-n$ Euro ausbezahlt.

Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Auszahlung:

k	3	4	5	6
$p(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Also ist $E(A)=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{2}=5$. Weil Erwartungswert der Auszahlung gleich Einsatz ist, ist das Spiel fair.

Sei z die Zahl, mit der man eine 0 überklebt. Dann erhält man wie oben folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Auszahlung:

k	$3+z$	$4+z$	$5+5$	$6+z$	6
$p(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Die Gleichung $7{,}5=\frac{3+z}{6}+\frac{4+z}{6}+\frac{5+z}{6}+\frac{6+z}{6}+1$ liefert $z=3$.

(b) Die Zufallsgröße Y ist binomialverteilt mit $n=10$ und $p=0{,}5$.

$P(Y\geq 3)\approx 0{,}945$.

$P(Y\geq 4)\approx 0{,}828$.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Y ist wegen $p=0{,}5$ symmetrisch zu ihrem Erwartungswert $E(Y)=5$. Die Werte 3 und 7 liegen ebenfalls symmetrisch zu $E(Y)$.

59 Euro werden ausgezahlt, wenn bei 9 Spielen 6 Euro und bei einem 5 Euro ausgezahlt werden. $P(Y=9)$ gibt die Wahrscheinlichkeit für 9 Spiele mit einer Auszahlung von 6 Euro an. Diese muss durch 3 dividiert werden, da für das übrige Spiel 3 gleichwahrscheinliche Ergebnisse möglich sind.