K2 MATHEMATIK KLAUSUR

27.03.2023

Aufgabe	PT	Ana	Geo	Sto	Gesamtpunktzahl
Punkte (max)	15	20	12,5	12,5	60
Punkte					
Notenpunkte					

PT	1	2	3	4	5	6	Summe
P. (max)	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	15
Punkte							

WT Ana	A.1 a)	b)	c)	Summe
P. (max)	9	7	4	20
Punkte				

WT Geo	a)	b)	c)	Summe
P. (max)	5	4	3,5	12,5
Punkte				

WT Sto	a)	b)	c)	d)	Summe
P. (max)	3	5	3	1,5	12,5
Punkte					

WTR und Merkhilfe dürfen erst nach Abgabe des Pflichtteils benutzt werden.

Pflichtteil

(1) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 2e^{-0{,}5x}$ und $g(x) = x^2 - x + 2$.

(a) (1 VP) Zeigen Sie, dass die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x = 0$ durch $y = 2 - x$ gegeben ist.

(b) (1,5 VP) Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder von f und g an der Stelle $x = 0$ berühren.

(2) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 4$. Die Tangenten an das Schaubild von f in $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ schneiden sich orthogonal. Bestimmen Sie den Wert von a.

(3) Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}\right)e^{2x-8} \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{1}{2}e^{2x-8}.$$

(a) Bestimmen Sie die Schnittstellen der Schaubilder von f und g.

(b) Bestimmen Sie $f'(4)$ und $g'(4)$, und interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf den Verlauf der beiden Graphen an dieser Stelle.

(4) Gegeben sind die Ebene $E : x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8$ und die zu ihr parallele Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Die Gerade h entsteht durch Spiegelung der Geraden g an der Ebene E.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

(5) Gegeben sind die Ebene $E : 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 10$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Wert von a, für den die Gerade g_a die Ebene E nicht schneidet.

(b) Bestimmen Sie den Wert von a, für den der Schnittpunkt der Geraden g_a mit der Ebene E in der x_2x_3-Ebene liegt.

(6) Ein Glücksrad besitzt einen roten und einen blauen Sektor. Die Wahrscheinlichkeit, dass be zufälligem Drehen „rot“ gedreht wird, sei p.

(a) Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit an, dass bei 4-maligem Drehen genau zwei Mal rot erscheint.

(b) Das Glücksrad wird zwei Mal nacheinander gedreht. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei zwei verschiedene Farben gedreht werden, beträgt $\frac{4}{9}$.

Bestimmen Sie alle Werte von p, für welche das der Fall ist.

Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 + 16}{x + 3}.$$

(a) (4 + 2 VP) Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von f, und geben Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich von f an.

(2 VP) Untersuchen Sie f für $x > -3$ auf Monotonie.

(1 VP) Begründen Sie, dass f auf $[2; \infty[$ eine Umkehrfunktion besitzt.

(b) (2 VP) Bestimmen Sie den Schnittpunkt des Schaubilds von f und der Geraden $y = x - 2$.

(2 VP) Zeigen Sie, dass $d(x) = f(x) - g(x)$ für $g(x) = x - 3$ gegeben ist durch

$$d(x) = \frac{25}{x + 3}$$

und bestimmen Sie das Verhalten von d für $x \to \infty$.

(3 VP) Die Gerade $y = x - 3$ und das Schaubild von f schließen im Intervall $[-2; t]$ $(t > -2)$ eine Fläche mit dem Inhalt $A(t)$ ein. Bestimmen Sie den Wert von t, für den $A(t) = 25$ ist.

(c) Die Funktion k hat die Gleichung

$$k(x) = \frac{x^2 + 25}{x}.$$

(2 VP) Zeigen Sie, dass man das Schaubild von k durch Verschiebung um 3 Einheiten nach rechts und 6 Einheiten nach oben aus demjenigen von f erhält.

(2 VP) Untersuchen Sie k auf Symmetrie. Schließen Sie daraus auf die Symmetrieeigenschaft von f.

Geometrie

Ein rechteckiger Spiegel ist um eine Achse drehbar. In der Ausgangslage befinden sich die Eckpunkte des Spiegels in $A(2|0|0)$, $B(-2|4|0)$, $C(-2|4|4)$ und $D(2|0|4)$.

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist eine Ebene $E_t : x_1 + tx_2 = 2t$ gegeben.

(a) (1 VP) Zeichnen Sie den Spiegel in ein Koordinatensystem.

(1 VP) Zeigen Sie, dass der Spiegel in der Ausgangslage in der Ebene E_1 liegt.

(2 VP) Die Ebenen E_t haben eine Gerade g gemeinsam. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden g.

(b) Der Spiegel wird so gedreht, dass er in der Ebene E_3 liegt. Um welchen Winkel wurde er gedreht?

Welche Stellung des Spiegels wird durch keine Ebene E_t dargestellt?

Der Spiegel wird um 90° gedreht. Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte des Spiegels nach der Drehung.

(c) Im Punkt $L(6|8|1)$ befindet sich eine Lichtquelle, welche einen Lichtstrahl mit der Richtung $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ aussendet.

Bestimmen Sie den Wert von t, für welchen der Spiegel parallel zum Lichtstrahl ist.

Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl für alle anderen Werte von t den Spiegel immer im gleichen Punkt trifft.

Stochastik

Für eine Städtereise stellt ein Busuntemehmen einen Fernbus mit 59 Plätzen bereit, die vor Reiseantritt gebucht und bezahlt werden.

Im Folgenden wird die Anzahl der angetretenen Buchungen als binomialverteilt mit $p = 0{,}95$ vorausgesetzt. Für einen bestimmten Reisetermin sind genau 59 Buchungen vorgenommen worden.

(a) (1 + 2 VP) Bestimmen sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

A Genau 59 Buchungen werden angetreten.

B Mindestens 55 Buchungen werden angetreten.

Da erfahrungsgemäß nicht alle Buchungen angetreten werden, verkauft das Busunternehmen mehr Pläze als vorhanden sind. Für eine Städtereise mit 96 Plätzen werden 99 Buchungen vorgenommen (Überbuchung). Es wird unverändert angenommen, dass die Anzahl der angetretenen Buchungen binomialverteilt mit $p = 0{,}95$ ist.

(b) (2 VP) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als eine Person ihre Reise wegen Überbuchung nicht antreten kann.

(3 VP) Bestimmen Sie die Anzahl der Buchungen, die das Busunternehmen bei einer Reise mit 96 Plätzen höchstens bestätigen darf, um das Risiko, dass mindestens eine Person ihre Reise aufgrund der Überbuchung nicht antreten kann, auf 5 % zu begrenzen.

In der Werbung eines anderen Busunternehmens werden bisher Kunden damit gewonnen, dass bis kurz vor Reiseantritt eine kostenlose Stornierung der Buchung möglich ist.

Aktuell liegt der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen bei 7 %. Das Busuntemehmen möchte diesen Anteil verringern und ändert die Vertragsbedingungen dahingehend, dass bei kurzfristigen Stomierungen ein Teil des Fahrpreises gezahlt werden muss. Es möchte die Vermutung absichern, dass durch diese Maßnahme der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen sinkt.

Die nächsten 1000 Buchungen sollen auf diese Wirkung hin untersucht werden. Betrachtet wird die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}07$; die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen wird als binomialverteilt angenommen.

(c) (3 VP) Bestimmen Sie die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen, bis zu der das Busunternehmen auf einem Signifikanzniveau von 5 % von einem Erfolg der Maßnahme ausgehen wird.

(d) Bei einem Signifikanzniveau von 1 % lautet die Entscheidungsregel: „Das Busunternehmen verwirft die Nullhypothese H_0 und geht von einem Erfolg der Maßnahme aus, falls die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen höchstens 51 beträgt.“

(1,5 VP) Bestimmen sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, falls aufgrund der Maßnahmen der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen nur noch 4 % beträgt, und erklären Sie diesen Fehler im Sachzusammenhang.

Lösungen

Pflichtteil

(1) (a) Es ist $f'(x) = -e^{-0,5x}$, also $f(0) = 2$ und $m = f'(0) = -1$. Also ist die Gleichung der Tangente durch $y = -x + 2$ gegeben.

(b) Dies folgt aus $g(0) = 2 = f(0)$ und $g'(0) = -1 = f'(0)$.

(2) Es ist $f'(x) = 2x - 2$, also $m_1 = f'(0) = -2$ und $m_2 = f'(a) = 2a - 2$. Aus $-1 = m_1 m_2 = -2(2a - 2)$ folgt $2a - 2 = \frac{1}{2}$, also $a = \frac{5}{4}$.

(3) Schnittstellen: $f(x) = g(x)$ ergibt

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}\Big)e^{2x-8} &= -\frac{1}{2}e^{2x-8}\\ \Big(\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}\Big)e^{2x-8} + \frac{1}{2}e^{2x-8} &= 0\\ e^{2x-8}\Big(\frac{1}{2}x^2 - 2x\Big) &= 0\end{aligned}$$

Satz vom Nullprodukt: $e^{2x-8} = 0$ hat keine Lösungen; aus $\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$ folgt $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.

$f'(x) = (x-2)e^{2x-8} + (x^2 - 4x - 1)e^{2x-8}$, also $f'(4) = 1$; entsprechend ist $g'(1) = -1$. Die Geraden schneiden sich in $x = 4$ orthogonal.

(4) Spiegeln von $P(7|7|-7)$ am Lotfußpunkt; Lotgerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7\\7\\-7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1\\2\\-2 \end{pmatrix}$; Schneiden mit E ergibt $8 = 7 + s + 2(7 + 2s) - 2(-7 - 2s) = 9s + 35$, also $s = -3$ und damit $L(4|1|-1)$; Spiegeln von P an L ergibt $P'(1|-5|5)$, also $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1\\-5\\5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix}$.

(5) Schneiden liefert $10 = 3(1 + 2r) - 4ar + 2 + 2r$, also $4(2 - a)r = 5$. Für $a = 2$ ergibt sich $0 = 5$; in diesem Fall schneiden sich E und g nicht; für $a \neq 2$ ergibt sich ein Schnittpunkt.

Damit der Schnittpunkt in der x_2x_3-Ebene liegt, muss $x_1 = 0$ sein, also $r = -\frac{1}{2}$ und damit $S(0|-\frac{a}{2}|1)$. Dieser Punkt liegt in E, wenn $4 \cdot \frac{a}{2} + 1 = 10$ ist, also für $a = \frac{9}{2}$.

(6) (a) $P(4 \text{ mal rot}) = \binom{4}{2}p^2(1-p)^2$.

(b) $\frac{4}{9} = 2p(1-p)$ liefert $p_1 = \frac{1}{3}$ und $p_2 = \frac{2}{3}$.

Analysis

(a) Bestimmung der Extrempunkte:

$$f'(x) = \frac{2x(x+3) - (x^2+16)}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x-16}{(x+3)^2},$$
$$f''(x) = \frac{(2x+6)(x+3)^2 - 2(x^2+6x-16)(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{50}{(x+3)^2}.$$

$f'(x) = 0$ liefert $x^2 + 6x - 16 = (x+8)(x-2) = 0$, also $x_1 = -8$ und $x_2 = 2$. Einsetzen in f'' ergibt $f''(-8) < 0$ und $f''(2) > 0$; also ist $T(-8|-16)$ Tiefpunkt und $H(2|4)$ Hochpunkt.

Maximaler Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; Wertebereich (vergleiche die Koordinaten der Extrempunkte) ist $W_f =]-\infty, -16] \cup [4, \infty[$.

Monotonie: Für $x \in\,]-3{,}2[$ ist $f'(x) < 0$, also f streng monoton fallend, für $x \in\,]2, \infty[$ ist $f'(x) > 0$, also f streng monoton steigend.

Weil f für $x > 2$ streng monoton steigend ist, hat f dort eine Umkehrfunktion.

(b) Schnittpunkt:

$$\frac{x^2+16}{x+3} = x - 2$$
$$x^2 + 16 = (x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$$

Also ist $x = 22$, $f(22) = 20$ und damit $S(22|20)$.

$$f(x) - g(x) = \frac{x^2+16}{x+3} - (x-3) = \frac{x^2+16}{x+3} - \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{25}{x+3}.$$

Für $x \to \infty$ geht also $f(x) - g(x) \to 0$.

$$\int_{-2}^{t} [f(x) - g(x)]\,dx = 25\ln(x+3)\Big|_{-2}^{t} = 25\ln(t+3).$$

Aus $25\ln(t+3) = 25$ folgt $t = e - 3$.

(c) Es ist

$$k(x) = f(x-3) + 6 = \frac{(x-3)^2+16}{(x-3)+3} + 6 = \frac{x^2-6x+9+16}{x} + \frac{6x}{x} = \frac{x^2+25}{x}.$$

Offenbar ist $k(-x) = -k(x)$, d.h. das Schaubild von k ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Also ist das Schaubild von f punktsymmetrisch bezüglich $(-3|-6)$, dem Mittelpunkt von Tief- und Hochpunkt aus (a).

Geometrie

Ein rechteckiger Spiegel ist um eine Achse drehbar. In der Ausgangslage befinden sich die Eckpunkte des Spiegels in $A(2|0|0)$, $B(-2|4|0)$, $C(-2|4|4)$ und $D(2|0|4)$.

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist eine Ebene $E_t : x_1 + tx_2 = 2t$ gegeben.

(1) Die Punkte $P(0|2|0)$ und $Q(0|2|1)$ liegen in $E_0 : x_1 = 0$ und in $E_1 : x_1 + x_2 = 2$. Also ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Schnittgerade von E_0 und $_1$. Weil P und Q in allen Ebenen E_t liegt, ist diese Gerade die gemeinsame Schnittgerade aller Ebenen.

(2) Es gilt $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also ist $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}$ und damit $\alpha \approx 26{,}6°$.

Die Ebenengleichung kann man in der Form $\frac{1}{t}x_1 + x_2 = 2$ schreiben; für $t = \infty$ ergibt sich $x_2 = 2$. Diese Ebene enthält die Drehachse, kommt aber unter den Ebenen E_t nicht vor.

Dreht man den Punkt $A(2|0|0)$ um $90°$ um $P(0|2|0)$, erhält man $A'(2|4|0)$ (Skizze von oben!). Die anderen Punkte sind $B'(-2|0|0)$, sowie $C'(-2|0|4)$ und $D'(2|4|4)$.

(3) Lichtbahn: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (der Parameter t ist schon vergeben!).

Bahn parallel zu E_t: $0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt $t = -1$.

Wenn der Lichtstrahl den Spiegel immer im gleichen Punkt trifft, sollte er auf der Drehachse liegen. Schneiden von Lichtbahn und Drehachse ergibt $S(0|2|3)$.

Stochastik

(a) Es bezeichne X die Anzahl der angetretenen Buchungen. X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}95$ und $n = 59$.

- $P(X = 59) \approx 0{,}0485$.
- $P(X \geq 55) = 1 - P(X \leq 54) \approx 0{,}8281$.

(b) Es bezeichne Y die Anzahl der angetretenen Buchungen. Y ist binomialverteilt mit $p = 0{,}95$ und $n = 99$. Wenn mindestens zwei Personen die Reise nicht antreten können, müssen mindestens 98 Personen die Reise antreten:

$$P(Y \geq 98) = 1 - P(Y \leq 97) \approx 0{,}0387.$$

Es soll $P(Y \geq 97) \leq 0{,}05$ sein.

n	$P(X \geq 97)$
98	0,0404
99	0,1225

Es dürfen höchstens 98 Buchungen vorgenommen werden.

Sei X die Anzahl der Buchungen, die kurzfristig storniert werden; X ist binomialverteilt mit $n = 1000$ und $p = 0{,}07$.

k	$P(X \leq k)$
56	0,0437
57	0,0574

Das Unternehmen geht von einem Erfolg aus, wenn die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen höchsten 56 beträgt.

(d) Es ist $P(X \geq 52) \approx 0{,}0357$. Die Nullhypothese wird nicht verworfen, obwohl der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen nur noch 4 % beträgt.