K2 MATHEMATIK KLAUSUR 3

01.04.2022

Aufgabe	PT	Ana	Geo	Sto	Gesamtpunktzahl
Punkte (max)	20	20	12	8	60
Punkte					
Notenpunkte					

PT	1	2	3	4	5	Summe
P. (max)	5	4	4	3	4	20
Punkte						

WT Ana	A.1 a)	b)	A.2	A.3	Summe
P. (max)	6	6	5	3	20
Punkte					

WT Geo	a)	b)	c)	d)	Summe
P. (max)	3	2	5	2	12
Punkte					

WT Sto	a)	b)	C.2	Summe
P. (max)	4	2	2	8
Punkte				

WTR und Merkhilfe dürfen erst nach Abgabe des Pflichtteils abgeholt werden.

Pflichtteil

(1) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$.

a) Geben Sie die beiden Nullstellen von f für $-\pi \leq x \leq \pi$ an.

b) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten in den beiden Nullstellen von f.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den beiden Tangenten und der x-Achse gebildet wird.

(2) Gegeben ist der Punkt $P(-1|7|2)$ und die Ebene $E : x_1 + 3x_3 = 0$.

a) Bestimmen Sie den Lotfußpunkt L von P in E und geben Sie den Abstand von P zur Ebene E an.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, der entsteht, wenn P an E gespiegelt wird.

(3) Gegeben sind die Funktionen f und g; das Schaubild von f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, das von g ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs. Beide Schaubilder haben einen Hochpunkt in $H(2|1)$.

a) Geben Sie für f und g jeweils die Koordinaten eines weiteren Extrempunkts an.

b) Untersuchen Sie das Schaubild der Funktion h mit $h(x) = f(x) \cdot g(x)^3$ auf Symmetrie.

(4) Die Ebene $E : 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten.

Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, die keinen Punkt mit drei gleichen Koordinaten enthält.

(5) In einem Behälter befinden sich Kugeln, von denen jede dritte gelb ist.

a) Es wird zweimal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen; berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln gelb sind.

b) Im Behälter werden zwei gelbe durch zwei blaue Kugeln ersetzt. Danach zieht man zweimal eine Kugel mit Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln gelb sind, beträgt jetzt $\frac{1}{16}$.

Ermitteln Sie die Anzahl der gelben Kugeln im Behälter.

Analysis

A.1. Ein digitales Messgerät misst bei einem Diabetes-Patienten kontinuierlich den Glukosewert (Blutzuckerwert). Der Glukosewert dieses Patienten wird in Abhängigkeit von der Zeit t im Intervall $[0; 3{,}75]$ mit Hilfe der Funktion g mit

$$g(t) = 13t^3 - 78t^2 + 104t + 96$$

modelliert. Dabei wird der Glukosewert $g(t)$ in u (Units) und die Zeit t in h (Stunden) seit Messbeginn angegeben.

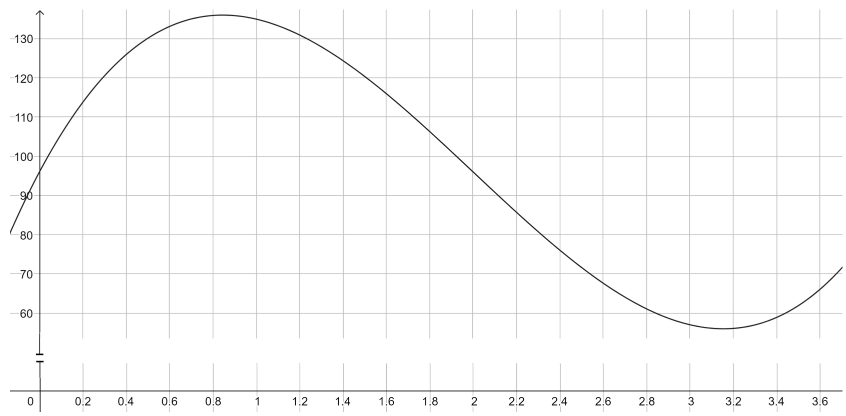


Abbildung 1. Schaubild von g

a) Bei einem Glukosewert von unter 70 u spricht man von Unterzuckerung. Bestimmen Sie mit Hilfe des Graphen die Länge des Zeitraums, in dem Unterzuckerung vorliegt.

Etwas mehr als drei Stunden nach Messbeginn liegt im Bereich der Unterzuckerung der niedrigste Glukosewert. Berechnen Sie den zugehörigen Zeitpunkt.

Weisen Sie nach, dass der Glukosewert eine Stunde nach Messbeginn um mehr als 40 % größer ist als zu Beginn der Messung.

Berechnen Sie den durchschnittlichen Glukosewert innerhalb der ersten zwei Stunden nach Messbeginn.

b) Aus medizinischer Sicht ist ein zu schnelles Absinken des Glukosewerts gefährlich.

$T(2|-52)$ ist der tiefste Punkt des Graphen der Ableitungsfunktion g' über dem Intervall $[0; 3{,}75]$. Interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang.

Die folgenden Terme beschreiben unterschiedliche Änderungsraten der Funktion g.

- Term A: $\dfrac{g(3) - g(1)}{3 - 1}$.
- Term B: $g'(1)$.

Geben Sie an, welche Änderungsraten diese beiden Terme beschreiben.

Liegt die momentane Änderungsrate unter einem Wert von -40 u/h, so zeigt das Messgerät des Patienten ein Warnsymbol an.

Weisen Sie nach, dass dieses Warnsymbol im betrachteten Zeitintervall mehr als eine Stunde lang angezeigt wird.

A.2. Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = (x^2 - tx + 2t) \cdot e^{-0{,}5x}$.

a) Bestimmen Sie t so, dass $P(0|8)$ auf dem Schaubild von f_t liegt.

b) Berechnen Sie diejenigen Werte von t, für die f_t genau eine Nullstelle hat.

c) Weisen Sie nach, dass es genau einen Punkt gibt, der auf allen Schaubildern der Schar liegt.

A.3. Für eine zweimal differenzierbare Funktion f gilt:

- $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
- $f'(x) = -4x^2 \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
- Das Schaubild von f hat zwei Wendestellen.

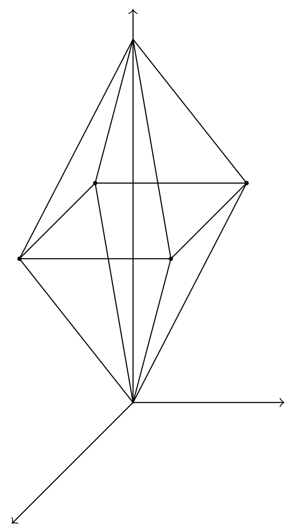
Bestimmen Sie die beiden Wendestellen von f.

Geometrie

Gegeben sind die Punkte $A(5|-5|12)$, $B(5|5|12)$ und $C(-5|5|12)$.

a) Zeigen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Quadrats sind, und bestimmen Sie die Koordinaten von D so, dass ABCD ein Quadrat ist.

Im Folgenden wird eine Doppelpyramide betrachtet. Die beiden Teilpyramiden ABCDT und ABCDS haben die gleiche Höhe. Der Punkt T liegt im Ursprung, S auf der x_3-Achse.



b) Die Seitenfläche BCT liegt in einer Ebene E. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.

Bestimmen Sie den Winkel, den die Seitenfläche BCT mit der Fläche ABCD einschließt.

E gehört zur Ebenenschar $E_k : kx_2 - 5x_3 = 5k - 60$ mit $k > 0$.

c) Alle Ebenen der Schar schneiden sich in einer Geraden. Weisen Sie nach, dass die Kante BC auf dieser Geraden liegt.

Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für welche E_k mit der Seitenfläche ADS mindestens einen Punkt gemeinsam hat.

Die Seitenfläche ADT liegt in der Ebene F. Geben Sie ohne weitere Rechnung einen Normalenvektor von F an und begründen Sie Ihre Angabe.

Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den E_k senkrecht zu F steht.

d) Die Doppelpyramide wird so um die x_1-Achse gedreht, dass die bisher mit BCT bezeichnete Seitenfläche in der x_1x_2-Ebene liegt und der bisher mit S bezeichnete Punkt eine positive x_2-Koordinate hat. Bestimmen Sie diese x_2-Koordinate und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch eine Skizze.

Stochastik

C.1. In Notransistan sind 52 % der Erwachsenen Frauen und 48 % Männer. Die Körpergrößen der Frauen und Manner sind jeweils annähernd normalverteilt mit $\mu_F = 166$ und $\sigma_F = 5$ (Frauen) bzw. mit $\mu_M = 178$ und $\sigma_M = 9$ (Männer); alle Angaben sind in cm.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A Ein zufällig ausgewählter Mann ist größer als 2 Meter.

B Eine zufällig ausgewählten Frau ist kleiner als 95 % des Erwartungswerts μ_F.

C Ein zufällig ausgewählter Erwachsener ist größer als 1,75 m.

b) Es werden 20 Erwachsene zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter ihnen mindestens doppelt so viele Frauen wie Männer befinden.

C.2. Bestimmen Sie den Wert von a so, dass

$$f(x) = \frac{a}{\sqrt{x}}$$

eine Dichtefunktion auf dem Intervall $[0, a]$ wird.

Lösungen

Pflichtteil

(1) a) Nullstellen sind $x_1 = -\pi$, $x_2 = \pi$.

b) $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2})$, also $m_1 = f'(-\pi) = \frac{1}{2}$, $m_2 = f'(\pi) = -\frac{1}{2}$.

Tangente in x_1 ist $y = \frac{1}{2}(x+\pi) = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$. Tangente in x_2 ist $y = -\frac{1}{2}(x-\pi)$. Schnittpunkt der Tangenten ist $S(0|\frac{\pi}{2})$.

Fläche des Dreiecks ist $F = \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$.

(2) HNF: $\frac{x_1+3x_3}{\sqrt{10}} = 0$, daher $d(P,E) = \frac{5}{\sqrt{10}}$.

Zum Spiegeln braucht man den Lotfußpunkt. Lotgerade durch P ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Schneiden mit E ergibt $-1 + t + 3(2+3t) = 0$, also $10t = -5$ und damit $t = -\frac{1}{2}$. Einsetzen ergibt $L(-\frac{3}{2}|7|\frac{1}{2})$ und $\overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, also $d(P,E) = |\overrightarrow{PL}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

b) $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, also $P'(-2|7|-1)$.

(3) a) f hat $H(-2|1)$, g hat $T(-2|-1)$.

b) Wir finden $h(-x) = f(-x)\cdot g(-x)^3 = f(x)\cdot(-g(x))^3 = -f(x)g(x)^3 = -h(x)$, also liegt Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

(4) Ist $P(x|x|x)$, so muss $3x + 2x + 3x = 6$ gelten, und esfolgt $x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Der Punkt ist $P(\frac{3}{4}|\frac{3}{4}|\frac{3}{4})$.

Ist $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, so darf $ax + bx + cx = d$ keine Lösung haben. Dies ist der Fall, wenn $a + b + c = 0$ und $d \neq 0$ ist. Eine solche Ebene ist also $F: x_1 - x_2 = 1$.

(5) a) $p(gg) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

b) Zuerst waren n gelbe und $2n$ blaue Kugeln im Behälter; nach dem Austausch sind es $n-2$ gelbe und $2n+2$ blaue Kugeln. Aus

$$\frac{1}{16} = p(g) = \left(\frac{n-2}{3n}\right)^2$$

folgt $\frac{n-2}{3n} = \frac{1}{4}$, also $4n - 8 = 4n$ und damit $n = 8$. Es sind daher jetzt $n - 2 = 8 - 2 = 6$ gelbe Kugeln im Behälter.

Analysis

a) Der Zeitraum geht von etwa 2,55 h bis 3,68 h und hat daher eine Länge von etwa 1,1 h.

$g'(t) = 39t^2 - 156t + 104 = 0$ ergibt $t_1 \approx 0{,}85$ und $t_2 \approx 3{,}15$. Der gesuchte Zeitpunkt ist 3,15 h nach Messbeginn.

Es ist $g(0) = 96$ und $g(1) = 135$; 40 % von 96 sind 38,4; $96 + 38{,}4 = 134{,}4 < g(1)$.

$$M = \frac{1}{2} \int_0^2 g(t)\,dt = 122.$$

Der Mittelwert beträgt 122 u.

b) Nach zwei Stunden fällt der Glukosewert im betrachteten Zeitraum am stärksten.

Die momentane Änderungsrate beträgt dort -52 u/h.

Term A: mittlere Änderungsrate während der zweiten und dritten Stunde nach Messbeginn.

Term B: momentane Änderungsrate 1 h nach Messbeginn.

$g'(t) = -40$ liefert $t_1 \approx 1{,}45$ und $t_2 \approx 2{,}55$; also wird das Warnsymbol mehr als eine Stunde lang angezeigt.

A.2. a) $8 = f_t(0) = 2t$ ergibt $t = 4$.

b) $f_t(x) = 0$ führt mit dem Satz vom Nullprodukt und $e^{-0,5x} \neq 0$ auf $x^2 - tx + 2t = 0$. Genau eine Lösung gibt es genau dann, wenn $t^2 - 4(2t) = t^2 - 8t = 0$ ist, also für $t = 0$ und $t = 8$.

c) Schneiden von f_0 und f_1 ergibt $x = 2$; wegen $f_t(2) = 4e^{-1}$ liegt $(2|4/e^t)$ auf allen Schaubildern der Schar.

A.3. Es ist

$f''(x) = -8xf(x) - 4x^2f'(x) = -8xf(x) - 4x^2(-4x^2f(x)) = 8x(2x^3-1)f(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Geometrie

a) Wir haben

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 0\\ 10\\ 0 \end{pmatrix}, & |\overrightarrow{AB}| &= 10,\\
\overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} -10\\ \\ 0 \end{pmatrix}, & |\overrightarrow{BC}| &= 10,\\
\overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} -10\\ 10\\ 0 \end{pmatrix}, & |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{200}.
\end{aligned}$$

Wegen $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ist das Dreieck rechtwinklig in B; außerdem ist das Dreieck gleichschenklig. Also kann man es zu einem Quadrat ergänzen und zwar ist $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Daraus folgt $D(5|-5|12)$.

b) $B(5|5|12)$, $C(-5|5|12)$, $T(0|0|0)$.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5\\ 5\\ 12 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -10\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5\\ 5\\ 12 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5\\ 5\\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ -12\\ 5 \end{pmatrix}$$

Damit wird $E: 12x_2 - 5x_3 = 0$.

Mit $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 0\\ 12\\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$ wird $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, also $\alpha \approx 67{,}4°$.

c) Punktprobe mit $B(5|5|12)$ und $C(-5|5|12)$ liefert $5k - 60 = 5k - 60$; also liegen beide Punkte auf den Ebenen und damit auf der Schnittgeraden.

Die Punkte A und D liegen auf E_k, wenn $-5k - 60 = 5k - 60$ ist, wenn also $k = 0$ ist.

Der Punkt $S(0|0|24)$ liegt auf E_k, wenn $-120 = 5k - 60$ ist, also für $k = -12$.

Also gibt es Schnittpunkte für $-12 \le k \le 0$.

Alternativ: Schnittpunkt von E_k mit der x_3-Achse ist $(0|0|12 - k)$. Also muss $-12 \le k \le 0$ sein.

Spiegeln von $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0\\ 12\\ -5 \end{pmatrix}$ an der x_1x_3-Ebene liefert $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0\\ -12\\ -5 \end{pmatrix}$.

Aus $\begin{pmatrix} 0\\ k\\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0\\ 12\\ 5 \end{pmatrix} = 0$ folgt $k = \frac{25}{12}$.

d) Es ist $y_S' = 24 \cdot \cos(90° - \alpha) \approx 22{,}2$.

Stochastik

a)

- $p(A) = p(X_M \geq 200) \approx 0{,}007$.
- $p(B) = p(X_F \leq 0{,}95 \cdot 1{,}66) \approx 0{,}048$.
- $p(C) = 0{,}52 \cdot p(X_F \geq 1{,}75) + 0{,}48 \cdot p(X_M \geq 1{,}75) \approx 0{,}321$.

b) Sei X die Anzahl der ausgewählten Frauen. X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}52$.

$p(X \geq 14) \approx 0{,}081$.

C.2. Es muss

$$1 = \int_0^a \frac{a}{\sqrt{x}}\, dx = 2a\sqrt{x}\Big|_0^a = 2a\sqrt{a}$$

gelten. Quadrieren ergibt $4a^3 = 1$, also $a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. Wegen $a > 0$ ist $f(x) \geq 0$.